Matematiche Complementari 31 gennaio 2013

1. Enunciare il teorema di recursione ed utilizzarlo per definire l'elevamento a potenza in (P,Sc,1). Richiamare le "proprietà delle potenze" e dimostrare che:

$$\forall a,b,c \in P \quad a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

2. Dimostrare che in ogni sistema di numerazione con base di rappresentazione b>1 esiste almeno una frazione che dà luogo a un numero periodico.
Con riferimento alla base 10 giustificare la *regola* che consente di scrivere la "frazione generatrice" di un numero decimale periodico

3. Considerare l'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7^2})$ e dare due rappresentazioni diverse di $\sqrt[3]{7^2}+7$ con polinomi di grado 6 in $\sqrt[3]{7^2}$. E' possibile rappresentare $\sqrt[3]{7^2}+7$ con un polinomio di secondo grado in $\sqrt[3]{7^2}$? Enunciare il teorema di rappresentazione per le estensioni algebriche semplici e discuterne la coerenza con l'esercizio proposto.

4. Fra i poligoni regolari con *n* lati, *n* numero naturale dispari >3, indicarne uno costruibile e uno non costruibile con riga e compasso e dimostrare quanto affermato.

5. Sia n un numero naturale, per quali valori di n $7^n - 1$ è divisibile per 9?
Giustificare la risposta
Qual è l'ultima cifra in base 7 del numero che in base 10 è 3^{2013} ?

Matematiche Complementari 27 febbraio 2013

1. Enunciare gli assiomi di Peano e discuterne l'indipendenza.

2. a) Qualunque sia il numero naturale X>2 il numero che in quella base di numerazione si scrive 1011021 non è primo.

Vero o falso?

Discutere l'affermazione con opportuni riferimenti alla teoria svolta

b) Qual è il resto nella divisione per 11 del numero 7^{2013}? Giustificare la risposta.

3. Per ciascuno dei seguenti numeri dire se è algebrico o trascendente rispetto a **Q** e giustificare quanto affermato:

$$\log_5 15,\ \ln 15,\ e^{i\pi},\ e^{\pi},\ e^{\sqrt{7}},\ \sqrt[5]{7}\,i$$

Considerate le corrispondenti estensioni di **Q** dire se vi sono relazioni di inclusione e/o di isomorfismo fra di esse.

Rappresentare gli elementi di $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{7}\,i)$

4. In $Z_5[x]$ il polinomio $p(x)= x^4+1$ è riducibile? In caso affermativo fattorizzarlo. Scrivere un altro polinomio in $Z_5[x]$ che abbia la stessa funzione polinomiale associata di $p(x)$. Come si rappresentano tutti i polinomi di $Z_5[x]$ con funzione polinomiale associata nulla?

Il polinomio $p(x)$ è riducibile in $\mathbb{R}[x]$? Giustificare la risposta

5. I poligoni regolari di 14, 15 e 16 lati sono costruibili con riga e compasso? Giustificare ogni risposta.

Matematiche Complementari 14 giugno 2013

1. Enunciare e dimostrare il teorema della divisione con resto nell'insieme dei numeri naturali.

2. Determinare la funzione polinomiale associata al polinomio x^2+2 in $Z_3[x]$. Scrivere almeno un altro polinomio in $Z_3[x]$ che abbia la stessa funzione polinomiale associata. Studiare la riducibilità di x^2+2 in $Z_3[x]$.

3. Data la successione (di Fibonacci):

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2$$

dimostrare che a_n e a_{n+1} sono primi fra loro $\forall n$.

Dire come la successione può essere utilizzata per costruire un sistema di numerazione (sistema di numerazione di Fibonacci). Di quale tipo di sistema di numerazione si tratta? Illustrarne le proprietà anche con l'aiuto di esempi opportuni.

4. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{3}+i$ su Q.
Rappresentare gli elementi di Q($\sqrt{3}+i$). Che relazione c'è fra Q($\sqrt{3}+i$) e Q($\sqrt{3}i$)?
Rappresentare $\sqrt{3}+4$ con un polinomio di grado 5 in $\sqrt{3}+i$ a coefficienti in Q. È possibile rappresentarlo con un polinomio di secondo grado? E di terzo?

5. Le equazioni $2x+5y=a,\ a \in Z$ e $2x+6y=b,\ b \in Z$ ammettono sempre soluzioni in Z ? In caso affermativo trovare le soluzioni, in caso negativo dire se è possibile determinare condizioni per la risolubilità e fornire esempi.

Matematiche Complementari 17 luglio 2013

1. Nel sistema matematico ($P,Sc,0$) dei numeri naturali definire la moltiplicazione e dimostrare che è commutativa

2. Discutere la possibilità di enunciare un criterio di divisibilità per tre per un numero scritto in una qualunque base X (X numero naturale maggiore di 1). Giustificare gli eventuali criteri trovati.

3. Considerato $Z_2[x]$, esaminare il problema della riducibilità del polinomio ax^2+bx+c in $Z_2[x]$. Scrivere poi due polinomi distinti in $Z_2[x]$ con associata la stessa funzione polinomiale di x^2+1. I polinomi trovati sono tutti riducibili?

4. Dopo aver dimostrato che e^{π} è trascendente su Q, si consideri $Q(e^{\pi})$ e, se è possibile, si dia l'esempio di:

- un numero algebrico su $Q(e^{\pi})$, non appartenente a $Q(e^{\pi})$ e algebrico su Q
- un numero algebrico su $Q(e^{\pi})$, non appartenente a $Q(e^{\pi})$ e trascendente su Q

Giustificare le risposte.
Stabilire le eventuali relazioni di inclusione e di isomorfismo tra:

$$Q(e),\ Q(e^{\sqrt{2}}),\ Q(\sqrt{e}),\ Q(e^{\pi})$$

5. Dopo aver motivato il fatto che il poligono di 3 lati e quello di 5 lati sono costruibili, discutere e, se necessario, correggere la seguente affermazione:
"I poligoni di $15k$ lati sono costruibili $\forall k$ naturale."

Matematiche Complementari — *19 settembre 2013*

1. Nel sistema matematico (*P,Sc,1*) dei numeri naturali considerare la relazione

$$a > b \Leftrightarrow \exists k : a = b + k$$

e dimostrare che è una relazione d'ordine totale.

2. Sia *n* un numero naturale non divisibile per 7. Si può affermare che $n^{12} - 1$ è divisibile per 7? Quali risultati teorici si possono utilizzare per rispondere?
Qual è il resto nella divisione per 13 del numero 2^{2013} ?

3. Dimostrare che in ogni sistema di numerazione con base di rappresentazione b>1 esiste almeno una frazione che dà luogo a un numero periodico.
Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:
un numero scritto in base 3 è periodico se è solo se scritto in base 6 è periodico.

4. Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{7} + i$ sul campo $\mathbb{Q}$.
E' possibile rappresentare $\sqrt{7} + 2e$ come polinomio di grado 5 in $\sqrt{7} + i$ a coefficienti in $\mathbb{Q}(e)$? in caso affermativo rappresentarlo. E' possibile rappresentarlo come polinomio di secondo grado?
Scrivere due estensioni di $\mathbb{Q}$ a cui appartenga l'elemento $\sqrt{7} + 2e$

5. Fra i poligoni regolari con *n* lati, *n* numero naturale pari >4, indicarne uno costruibile e uno non costruibile con riga e compasso e dimostrare quanto affermato.