Matematiche Complementari *24 gennaio 2012*

1. Enunciare gli assiomi di Peano e dimostrare che due sistemi che li soddisfano sono fra loro isomorfi.

2. Data la successione (di Fibonacci):

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2$$

dimostrare che a_n e a_{n+1} sono primi fra loro $\forall n$.

Dire come può essere utilizzata per costruire un sistema di numerazione (sistema di numerazione di Fibonacci). Di quale tipo di sistema di numerazione si tratta? Illustrarne le proprietà anche con l'aiuto di esempi opportuni.

3. Sia n un numero naturale. Per quali valori di n si può affermare che $n^{12} + 6$ è divisibile per 7? Quali risultati teorici si possono utilizzare per rispondere?
Per n =7 qual è l'ultima cifra di $n^{12} + 6$ (nella scrittura in base 10)?
Qual è il resto nella divisione per 12 del numero 5^{2012} ?

4. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{5} + i$ su Q.
Rappresentare gli elementi di Q($\sqrt{5} + i$). Che relazione c'è fra Q($\sqrt{5} + i$) e Q($\sqrt{5}i$)?
Rappresentare $\sqrt{5} + 4$ con un polinomio di grado 5 in $\sqrt{5} + i$ a coefficienti in Q. È possibile rappresentarlo con un polinomio di secondo grado? E di terzo?

5. In $Z_5[x]$ determinare la funzione polinomiale associata al polinomio $4x^4 + 3x^2 + 3$.
Scrivere almeno un altro polinomio in $Z_5[x]$ che abbia la stessa funzione polinomiale associata.
Discutere la riducibilità di $4x^4 + 3x^2 + 3$ in $Z_5[x]$, in Q[x] e in R[x] ? Giustificare le risposte.

Matematiche Complementari 22 febbraio 2012

1. Nel sistema matematico (*P,Sc,0*) dei numeri naturali definire la moltiplicazione e dimostrare che:

   $xy=1 \Leftrightarrow x=1 \wedge y=1$

   $xy=0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0$

2. Per quali valori naturali di n il numero $3 \cdot 7^n$ scritto in base 10 ha come ultima cifra 3?per quali ha come ultima cifra 1?
   Giustificare le risposte

3. Per ciascuno dei seguenti numeri dire se è algebrico o trascendente rispetto a $\mathbb{Q}$ e dimostrare quanto affermato:

   $\log_3 18,\ \ln 18,\ e^{\ln 18},\ e^i,\ e^\pi,\ \sqrt[3]{5}\, i$

   Per ognuno di essi considerare la corrispondente estensione di Q e dire se esistono relazioni di inclusione e/o di isomorfismo fra le estensioni considerate.
   Rappresentare gli elementi delle estensioni $\mathbb{Q}(e^i)$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\, i)$.

4. Dare la definizione di sistema di numerazione, distinguendo fra sistema semplice e sistema complesso.
   Considerati poi i sistemi di numerazione polinomiale illustrare, con opportuni esempi, metodi per passare dalla rappresentazione di un numero in una base a quella in un’altra base. (Utilizzare per gli esempi basi entrambe diverse dalla base 10).

5. Dimostrare che decagono e poligono regolare di 15 lati sono costruibili con riga e compasso. E’ vero che $\forall n \in N$ il poligono di 5n lati è costruibile? E quello di 2n lati?

Matematiche Complementari 28 giugno 2012

1. Nell'insieme dei numeri razionali:
definire la moltiplicazione e dimostrare che ogni elemento diverso da zero ammette inverso
definire l'usuale ordinamento e verificare che si tratta di una relazione d'ordine totale.

2. Enunciare e giustificare l'usuale criterio di divisibilità per tre per un numero scritto in base10.
Discutere la possibilità di formulare un criterio di divisibilità per tre per un numero scritto in base 2 e per un numero scritto in base 6. Giustificare gli eventuali criteri trovati.
E' possibile qualche forma di generalizzazione dei risultati trovati?

3. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt[3]{2}+1$ su $\mathbb{Q}$ e rappresentare gli elementi dell'estensione corrispondente.
Che relazione c'è tra $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+1)$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$?
$\sqrt[3]{2}+1$ è algebrico su $\mathbb{Q}(e)$?
Considerare $\sqrt[3]{2}+e$ e determinare almeno una estensione di $\mathbb{Q}$ su cui è algebrico e una su cui è trascendente.

4. Le equazioni $2x+3y=a,\ a \in Z$ e $2x+4y=b,\ b \in Z$ ammettono sempre soluzioni in Z ? In caso affermativo trovare le soluzioni, in caso negativo dire se è possibile determinare condizioni per la risolubilità e fornire esempi.

5. Indicare due poligoni regolari, con un numero dispari di lati, non costruibili con riga e compasso e per ognuno spiegare esaurientemente perché non è costruibile.

Matematiche Complementari   *24 luglio 2012*

1. Nell'insieme dei numeri interi relativi:
- definire la moltiplicazione e dimostrare che gli unici elementi invertibili sono +1 e -1
- definire l'usuale ordinamento e verificare che si tratta di una relazione d'ordine totale.

2. Dopo aver dato la definizione di numero trascendente su un campo, dimostrare la trascendenza di $e^{\sqrt{2}}$ e di e^{π} sul campo Q dei numeri razionali.
Fornire i seguenti esempi:
- un numero algebrico su $Q(e^{\sqrt{2}})$, trascendente su Q e non appartenente a $Q(e^{\sqrt{2}})$.
- un numero algebrico su $Q(e^{\sqrt{2}})$ e su $Q(e^{\pi})$ e non appartenente a Q.

Giustificare le risposte.

3. Discutere la possibilità di enunciare un criterio di divisibilità per $x+1$ e per $x-1$ per un numero scritto in una qualunque base x. E' necessaria qualche precisazione sulla base?

4. Determinare la funzione polinomiale associata al polinomio x^3+x^2+1 in $Z_3[x]$. Scrivere almeno un altro polinomio in $Z_3[x]$ che abbia la stessa funzione polinomiale associata. Studiare la riducibilità del polinomio x^3+x^2+1 in $Z_3[x]$ e, se è possibile, scriverlo in forma fattorizzata.
Discutere la riducibilità dello stesso polinomio in $Z[x]$, $Q[x]$ e $R[x]$ ed evidenziare le eventuali differenze fra i quattro ambienti considerati.

5. Qual è l'ultima cifra del numero 7^{2012} in base 10 ? E in base 9 ?
Quali risultati teorici si possono utilizzare per rispondere?

Matematiche Complementari *19 settembre 2012*

1. Considerare in $(P, Sc, 1)$ la relazione

$$a > b \Leftrightarrow \exists k : a = b + k$$

e dimostrare che è transitiva e tricotomica

2. Dimostrare che in ogni sistema di numerazione con base di rappresentazione b>1 esiste almeno una frazione che dà luogo a un numero periodico.
Con riferimento alla base 10 giustificare la regola che consente di scrivere la frazione generatrice di un numero decimale periodico

3. Considerare l'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5^2})$ e dare due rappresentazioni diverse di $\sqrt[3]{5^2}+5$ con polinomi di grado 6 in $\sqrt[3]{5^2}$. E' possibile rappresentare $\sqrt[3]{5^2}+5$ con un polinomio di secondo grado in $\sqrt[3]{5^2}$? Enunciare il teorema di rappresentazione per le estensioni algebriche semplici e discuterne la coerenza con l'esercizio proposto.

4. Fra i poligoni regolari con un numero pari di lati indicarne due non costruibili con riga e compasso e dimostrarne la non costruibilità.

5. Sia n un numero naturale, per quali valori di n $17^n - 1$ è divisibile per 9?
Giustificare la risposta
Qual è il resto nella divisione per 17 del numero 2^{2012} ?