Esercizi gennaio 2010

Esercizio 1

Sia M una varietà differenzibile di dimensione $m > 0$ e sia $F : M \to \mathbb{R}^n$ una summersione. Dimostrare che M non è compatta.

Esercizio 2

Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$, supponiamo che 0 sia un valore regolare per g e sia $M \neq \emptyset$, $M := g^{-1}(0)$. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $\mathcal{C}^\infty$ e sia $h := f_{|M}$. Mostrare che $\{\textit{punti critici di } h\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0 \textit{ e } \textit{rango}(A_x) < m + k\}$ dove $A_x = \begin{pmatrix} (Jf)_x \\ (Jg)_x \end{pmatrix}$.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2$ e sia $h = f_{|S^3}$.

(1) Trovare i punti critici e i valori critici di h.
(2) Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, z, w) = (x^2 + y^2, w)$, trovare i punti critici di $\phi_{|S^3}$.
(3) Mostrare che $M := h^{-1}(1/2)$è una varietà differenziabile di dimensione 2.
(4) Determinare $T_p(M)$ per $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) - \{x_0 = 0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $f(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (\frac{x_0^2+2x_2x_3}{x_0^2+x_1^2} : \frac{x_3}{x_0})$.

(1) Verificare che f è ben definita.
(2) Dire se f ha punti critici.

Esercizio 5

Sia $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1\}$, sia $\omega \in \Lambda^2(M)$, $\omega = \frac{y}{x-1} dx \wedge dz + \frac{z}{x-1} dx \wedge dy$.

(1) ω è chiusa?
(2) ω è esatta?
(3) Sia $X = \{\frac{(x-5)^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = \frac{1}{7}\}$. Dimostrare che X è una sottovarietà di M.
(4) Calcolare $\int_X \omega$.

Esercizio 6

Sia $\omega = (\frac{-y}{x^2+y^2} + 2xy)dx + (\frac{x}{x^2+y^2} + x^2)dy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$.

(1) ω è chiusa?
(2) ω è esatta?
(3) Sia $X = \{(x-1)^2 + (y+5)^2 = \frac{1}{4}\}$. Dimostrare che X è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
(4) Calcolare $\int_X \omega$.

Esercizio 7
Sia $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

(1) $\omega_{|S^2}$ è chiusa?
(2) Calcolare $\int_{S^2} \omega$.
(3) $\omega_{|S^2}$ è esatta?

Esercizio 8
Sia M una varietà differenziabile compatta, connessa, orientabile di dimensione n. Mostrare che l'applicazione

$$H^n_{dR}(M) \to \mathbb{R},$$
$$[\omega] \mapsto \int_M \omega$$

è suriettiva.

Esercizio 9
Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$. Supponiamo che M abbia una forma simplettica ω, cioè $\omega \in \Lambda^2(M)$, tale che ω^n sia mai nulla e $d\omega = 0$. Mostrare che se M è compatta, $dim(H^{2k}_{dR}(M)) \neq 0$ $\forall k$.