

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 23.02.2015

Compito A

Esercizio 1.

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1, 0, 4)$, $(-1, 2, 6)$ e $(1, -1, 1)$ e C quelli di coordinate $(0, 3, 3)$; inoltre, chiamiamo r la retta passante per P_1 e per P_2 e v il vettore ${}^t(2, 3, -1)$.

- Scrivere equazioni cartesiane per la retta r , per il piano π passante per Q e la cui giacitura è ortogonale al vettore v e per la sfera S_1 con centro nel punto Q e raggio 4;
- determinare le posizioni relative di π e S_1 , di r e π , di r e S_1 ;
- Siano S_2 e S_3 altre due sfere, esterne a S_1 e tra di loro, di raggi tutti e 3 diversi. Dimostrare che esistono o che non esistono piani tangenti contemporaneamente a tutte e 3 le sfere.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che:

$$F_t(1, 1, 0) = (2 + t, 2, -4 - t), F_t(1, -3, -1) = (-2t, 0, 2t), F_t(0, 1, 1) = (-1, -1, 2).$$

- Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .
- Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Date matrici A e B di ordine 2, A invertibile e B simmetrica. Sia I la matrice identità di ordine 2. e sia $C = {}^tABAB$ *Vero o Falso*:

- Se il rango di C è uguale a 2 allora il rango di B^2 è 2.
- Se $B + I$ è positiva allora $C + {}^tC + I$ è positiva.
- Se A è invertibile allora $C - I$ non è mai ortogonale .
- Se A e B sono invertibili allora $C + I$ non è ortogonale.

Punti (1+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 23.02.2015

Compito B

Esercizio 1.

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(0, 1, -4)$, $(2, -1, -6)$ e $(-1, 1, -1)$ e C quelli di coordinate $(3, 0, -3)$; inoltre, chiamiamo r la retta passante per P_1 e per P_2 e v il vettore ${}^t(3, 2, 1)$.

- Scrivere equazioni cartesiane per la retta r , per il piano π passante per Q e la cui giacitura è ortogonale al vettore v e per la sfera S_1 con centro nel punto Q e raggio 4;
- determinare le posizioni relative di π e S_1 , di r e π , di r e S_1 ;
- Siano S_2 e S_3 altre due sfere, esterne a S_1 e tra di loro, di raggi tutti e 3 diversi. Dimostrare che esistono o che non esistono piani tangenti contemporaneamente a tutte e 3 le sfere.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale che

$$F_t(1, 1, 0) = (2 - t, 2, -4 + t), F_t(1, -3, -1) = (2t, 0, -2t), F_t(0, 1, 1) = (-1, -1, 2).$$

- Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- Calcolare autovalori e autovettori di A_0 .
- Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Date matrici A e B di ordine 2, A invertibile e B simmetrica. Sia I la matrice identità di ordine 2. e sia $C = {}^tABAB$ *Vero o Falso*:

- Se il rango di C è uguale a 2 allora il rango di B^2 è 2.
- Se $B + I$ è positiva allora $C + {}^tC + I$ è positiva.
- Se A è invertibile allora $C - I$ non è mai ortogonale .
- Se A e B sono invertibili allora $C + I$ non è ortogonale.

Punti (1+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 23.02.2015 Risultati

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (croettare)

Compito **A** **B** (croettare)

ESERCIZIO 1

a)

b)

c)

ESERCIZIO 2

1.

2.

3.

4.

ESERCIZIO 3 (croettare V=vero o F= falso)

1. V F

2. V F

3. V F

4. V F

- La mancata restituzione o compilazione del modulo comporta l'esclusione dall'esame.
- L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente.
- Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo.
- Il foglio del testo degli esercizi **NON** deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 1 & t+1 & -2-t \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2-t & t+4 \end{pmatrix}$$