Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 19.01.2015

Compito **A**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1 e P_2 i punti di coordinate rispettivamente $(1, 2, -1), (-1, 0, 1)$; C e Q i punti di coordinate risp. $(3, 2, 1)$ e $(-2, 1, 1)$; inoltre, poniamo $v =^t (2, 1, 1)$ e chiamiamo π_1 il piano di equazione cartesiana $x - y + 2z + 3 = 0$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2, il piano π_2 passante per Q e con giacitura ortogonale a v e per la sfera S con centro nel punto C e passante per Q;

b) determinare le posizioni relative di π_1 e S, di r e π_2, di r e S;

c) esistono sfere tangenti a π_1, a π_2 e a r (simultaneamente)? Se sì, quante ne esistono?

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1, 1, 0) = (t, 0, 0)$, $F_t(1, -1, 0) = (t, -2t, 2t)$, $F_t(t, 0, 1) = (t^2, -t^2 + t, t^2 + 2t + 2)$

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2.
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 3 con B definita positiva *Vero o Falso*:

1. $A + B$ è diagonalizzabile sui complessi.
2. Se $A^5 - B$ è definita positiva allora $A + B$ è definita positiva.
3. AB è sempre diagonalizzabile sui reali.

Punti (1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 19.01.2015

Compito **B**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1 e P_2 i punti di coordinate rispettivamente $(2,-1,1),(0,1,-1)$; C e Q i punti di coordinate risp. $(2,1,3)$ e $(1,1,-2)$; inoltre, poniamo $v =^t (1,1,2)$ e chiamiamo π_1 il piano di equazione cartesiana $-x+2y+z+3=0$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2, il piano π_2 passante per Q e con giacitura ortogonale a v e per la sfera S con centro nel punto C e passante per Q;

b) determinare le posizioni relative di π_1 e S, di r e π_2, di r e S;

c) esistono sfere tangenti a π_1, a π_2 e a r (simultaneamente)? Se sì, quante ne esistono?

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1,1,0) = (t,0,0)$, $F_t(1,-1,0) = (t,-2t,2t)$, $F_t(t,0,1) = (t^2,-t^2+t,t^2+2t+2)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2.
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 3 con B definita positiva *Vero o Falso*:

1. $A+B$ è diagonalizzabile sui complessi.
2. Se A^5+B è definita positiva allora $A+B$ è definita positiva.
3. AB è sempre diagonalizzabile sui reali.

Punti (1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 19.01.2015

Compito **C**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1 e P_2 i punti di coordinate rispettivamente $(-1, 1, -2), (1, -1, 0)$; C e Q i punti di coordinate risp. $(1, 3, -2)$ e $(1, -2, -1)$; inoltre, poniamo $v =^t (1, 2, -1)$ e chiamiamo π_1 il piano di equazione cartesiana $2x + y + z + 3 = 0$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2, il piano π_2 passante per Q e con giacitura ortogonale a v e per la sfera S con centro nel punto C e passante per Q;

b) determinare le posizioni relative di π_1 e S, di r e π_2, di r e S;

c) esistono sfere tangenti a π_1, a π_2 e a r (simultaneamente)? Se sì, quante ne esistono?

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1, 1, 0) = (-t, 0, 0)$ $F_t(1, -1, 0) = (-t, +2t, -2t)$, $F_t(-t, 0, 1) = (t^2, -t^2 - t, t^2 - 2t + 2)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2.
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 2. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 3 con B definita positiva *Vero o Falso*:

1. $A - B$ è diagonalizzabile sui complessi .
2. Se $A^3 - B$ è definita positiva allora $A + B$ è definita positiva.
3. BA è sempre diagonalizzabile sui reali

Punti (1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015
Prova scritta del 19.01.2015

Compito **D**

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1 e P_2 i punti di coordinate rispettivamente $(1,-2,1),(-1,0,-1)$; C e Q i punti di coordinate risp. $(3,-2,-1)$ e $(-2,-1,-1)$; inoltre, poniamo $v={}^t(2,-1,-1)$ e chiamiamo π_1 il piano di equazione cartesiana $x+y-2z+3=0$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e P_2, il piano π_2 passante per Q e con giacitura ortogonale a v e per la sfera S con centro nel punto C e passante per Q;

b) determinare le posizioni relative di π_1 e S, di r e π_2, di r e S;

c) esistono sfere tangenti a π_1, a π_2 e a r (simultaneamente)? Se sì, quante ne esistono?

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che
$F_t(1,1,0) = (t,0,0)$, $F_t(1,-1,0) = (t,-2t,2t)$, $F_t(t,0,1) = (t^2,-t^2+t,t^2+4t+2)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2.
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 2. Siano A e B matrici simmetriche reali di ordine 3 con B definita positiva *Vero o Falso*:

1. $A+B$ è diagonalizzabile sui complessi.
2. Se A^3+B è definita positiva allora $A+B$ è definita positiva.
3. AB è sempre diagonalizzabile sui reali.

Punti (1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2014
Prova scritta del 19.01.2015 Risultati

Nome: Cognome: Matricola:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

a)

b)

c)

ESERCIZIO 2

1.

2.

3.

4.

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

1. V F
2. V F
3. V F

- La mancata restituzione o compilazione del modulo comporta l'esclusione dall'esame.
- L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente.
- Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo.
- Il foglio del testo degli esercizi **NON** deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ -t & t & -t \\ t & +t & 2t+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t-4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & t \\ 3 & -t & 3 \end{pmatrix}$$