

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 6.02.2015

Compito A

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P il punto di coordinate $(2, 1, 3)$, Q quello di coordinate $(4, -1, 1)$ e A e B quelli di coordinate $(-2, 3, 5)$ e $(6, -1, 1)$, rispettivamente; inoltre, chiamiamo π il piano di equazione cartesiana $x + 2y + z - 1 = 0$ e sia r_1 la retta passante per P la cui giacitura è generata da $v = {}^t(1, -1, 2)$.

- a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r_2 passante per P e ortogonale al piano π , per la sfera S con centro nel punto Q e passante per P ed equazioni parametriche per la retta r_3 passante per A e B ;
- b) determinare le posizioni relative di π e S , di r_3 e π , di r_2 e r_3 ;
- c) trovare equazioni per infinite sfere tangenti a r_1 , r_2 e r_3 simultaneamente (se esistono).

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che

$$F_t(1, 1, 0, 0) = (2t, t + 1, -t, 0), \quad F_t(1, -2, -1, 0) = (2t, -2, -t, 0), \quad F_t(0, 0, 1, 0) = (0, t, 3t, 0), \\ F_t(0, 1, 1, 1) = (0, 1 + t, 2t, 2t).$$

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
2. Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2 .
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Date matrici simmetriche reali A e B di ordine 2 si dicono razionalmente congrue se esiste C invertibile con coefficienti razionali tale che $A = {}^tCBC$. Sia I la matrice identica di ordine 2. *Vero o Falso:*

1. Se B è definita positiva e ha coefficienti interi positivi ($b_{i,j} > 0$ per ogni i, j) allora B è razionalmente congrua ad I .
2. I è razionalmente congrua a $16I$.
3. I è razionalmente congrua a $2I$.
4. I è razionalmente congrua a $3I$.

Punti (1+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 6.02.2015

Compito B

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P il punto di coordinate $(1, 3, 2)$, Q quello di coordinate $(-1, 1, 4)$ e A e B quelli di coordinate $(3, 5, -2)$ e $(-1, 1, 6)$, rispettivamente; inoltre, chiamiamo π il piano di equazione cartesiana $2x + y + z - 2 = 0$ e sia r_1 la retta passante per P la cui giacitura è generata da $v = {}^t(-1, 2, 1)$.

- a) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r_2 passante per P e ortogonale al piano π , per la sfera S con centro nel punto Q e passante per P ed equazioni parametriche per la retta r_3 passante per A e B ;
- b) determinare le posizioni relative di π e S , di r_3 e π , di r_2 e r_3 ;
- c) trovare equazioni per infinite sfere tangenti a r_1 , r_2 e r_3 simultaneamente (se esistono).

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che

$$F_t(1, 1, 0, 0) = (3t, t + 1, -t, 0), \quad F_t(1, -2, -1, 0) = (3t, -2, -t, 0), \quad F_t(0, 0, 1, 0) = (0, t, 3t, 0), \\ F_t(0, 1, 1, 1) = (0, 1 + t, 2t, 3t).$$

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
2. Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_2 .
4. Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Date matrici simmetriche reali A e B di ordine 2 si dicono razionalmente congrue se esiste C invertibile con coefficienti razionali tale che $A = {}^tCBC$. Sia I la matrice identica di ordine 2. *Vero o Falso:*

1. Se B è definita positiva e ha coefficienti interi positivi ($b_{i,j} > 0$ per ogni i, j) allora B è razionalmente congrua ad I .
2. I è razionalmente congrua a $16I$.
3. I è razionalmente congrua a $5I$.
4. I è razionalmente congrua a $3I$.

Punti (1+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 6.02.2015

Compito C

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P il punto di coordinate $(-3, 2, 1)$, Q quello di coordinate $(-1, 4, -1)$ e A e B quelli di coordinate $(-5, -2, 3)$ e $(-1, 6, -1)$, rispettivamente; inoltre, chiamiamo π il piano di equazione cartesiana $-x + y + 2z + 3 = 0$ e sia r_1 la retta passante per P la cui giacitura è generata da $v = {}^t(-2, 1, -1)$.

- Scrivere equazioni cartesiane per la retta r_2 passante per P e ortogonale al piano π , per la sfera S con centro nel punto Q e passante per P ed equazioni parametriche per la retta r_3 passante per A e B ;
- determinare le posizioni relative di π e S , di r_3 e π , di r_2 e r_3 ;
- trovare equazioni per infinite sfere tangenti a r_1 , r_2 e r_3 simultaneamente (se esistono).

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che

$$F_t(1, 1, 0, 0) = (4t, t + 1, -t, 0), \quad F_t(1, -2, -1, 0) = (4t, -2, -t, 0), \quad F_t(0, 0, 1, 0) = (0, t, 3t, 0), \\ F_t(0, 1, 1, 1) = (0, 1 + t, 2t, 4t).$$

- Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
- Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- Calcolare autovalori e autovettori di A_2 .
- Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Date matrici simmetriche reali A e B di ordine 2 si dicono razionalmente congrue se esiste C invertibile con coefficienti razionali tale che $A = {}^tCBC$. Sia I la matrice identica di ordine 2. *Vero o Falso:*

- Se B è definita positiva e ha coefficienti interi positivi ($b_{i,j} > 0$ per ogni i,j) allora B è razionalmente congrua ad I .
- I è razionalmente congrua a $9I$.
- I è razionalmente congrua a $2I$.
- I è razionalmente congrua a $3I$.

Punti (1+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 6.02.2015

Compito D

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P il punto di coordinate $(-1, 2, 3)$, Q quello di coordinate $(1, 4, 1)$ e A e B quelli di coordinate $(-3, -2, 5)$ e $(1, 6, 1)$, rispettivamente; inoltre, chiamiamo π il piano di equazione cartesiana $-2x + y + z + 4 = 0$ e r_1 la retta passante per P la cui giacitura è generata da $v = {}^t(1, 1, 2)$.

- Scrivere equazioni cartesiane per la retta r_2 passante per P e ortogonale al piano π , per la sfera S con centro nel punto Q e passante per P ed equazioni parametriche per la retta r_3 passante per A e B ;
- determinare le posizioni relative di π e S , di r_3 e π , di r_2 e r_3 ;
- trovare equazioni per infinite sfere tangenti a r_1 , r_2 e r_3 simultaneamente (se esistono).

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, tale che

$$F_t(1, 1, 0, 0) = (5t, t + 1, -t, 0), \quad F_t(1, -2, -1, 0) = (5t, -2, -t, 0), \quad F_t(0, 0, 1, 0) = (0, t, 3t, 0), \\ F_t(0, 1, 1, 1) = (0, 1 + t, 2t, 5t).$$

- Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 .
- Dire per quali valore del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile sui reali.
- Calcolare autovalori e autovettori di A_2 .
- Calcolare al variare di t la segnatura di ${}^tA_t + A_t$.

Punti (4+5+3+4)

Esercizio 3. Date matrici simmetriche reali A e B di ordine 2 si dicono razionalmente congrue se esiste C invertibile con coefficienti razionali tale che $A = {}^tCBC$. Sia I la matrice identica di ordine 2. *Vero o Falso:*

- Se B ha segnatura 2.0 e ha coefficienti interi positivi ($b_{i,j} > 0$ per ogni i,j) allora B è razionalmente congrua ad I .
- I è razionalmente congrua a $4I$.
- I è razionalmente congrua a $5I$.
- I è razionalmente congrua a $3I$.

Punti (1+1+1+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2014-2014

Prova scritta del 6.02.2015 Risultati

Nome: _____ Cognome: _____ Matricola: _____

Anno di corso: _____ Mat. _____ Fis. _____ (crocettare)

Compito **A** **B** **C** **D** (crocettare)

ESERCIZIO 1

a)

b)

c)

ESERCIZIO 2

1.

2.

3.

4.

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

1. V F

2. V F

3. V F

4. V F

- La mancata restituzione o compilazione del modulo comporta l'esclusione dall'esame.
- L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente.
- Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo.
- Il foglio del testo degli esercizi **NON** deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 \\ 0 & -t & 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t - 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & t \\ 3 & -t & 3 \end{pmatrix}$$