Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 23.02.2009

Compito **A**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1, 1, -1), (3, 2, 3)$ e $(3, 1, 0)$, v il vettore ${}^t(2, 2, 1)$, π_1 il piano di equazione $x - y + 2z - 2 = 0$ e S_1, S_2 le due sfere di equazioni rispettivamente $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-2 = 0$ e $x^2+y^2+z^2+4x+2y-6z+8 = 0$.

a) Trovare il centro C_1 e il raggio R_1 della sfera S_1, il centro C_2 e il raggio R_2 della sfera S_2 e un'equazione cartesiana per la retta r passante per P_1 e P_2;

b) trovare un'equazione cartesiana per il piano π_2 passante per Q e la cui giacitura contiene la giacitura di r e il vettore v e determinare se S_1 e S_2 sono secanti, tangenti o esterne l'una all'altra;

c) trovare un'equazione parametrica per la retta s (se esiste) intersezione di π_1 e π_2 e equazioni cartesiane per le rette (se esistono) contenenti i punti che hanno distanza 2 dal piano π_1 e 3 dal piano π_2.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(1, 0, 0, 0) = (2t^2, 0, 0, 0)$, $F_t(t, 1, 0, 0) = (2t^3 + t, t, 0, 0)$, $F_t(0, 3, 1, 0) = (3t - 3, 3t + 3, 2, -t)$ e $F_t(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 2 - t, -t - 4)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.
2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_1.
4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_0 + A_0$.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A e B due matrici reali quadrate e simmetriche di ordine 4, supponiamo che A abbia segnatura a $(2, 1)$ e che B sia definita positiva:
Vero o Falso:

1. $A + B$ è sempre invertibile.
2. Se $A + B$ può avere segnatura $(1, 3)$.
3. La matrice complessa $C = A + iB$ è sempre invertibile ($i^2 = -1$).

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 23.02.2009

Compito **B**

Esercizio 1.
Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1,-1,1), (2,3,3)$ e $(1,0,3)$, v il vettore ${}^t(2,1,2)$, π_1 il piano di equazione $x-2y-z-2=0$ e S_1, S_2 le due sfere di equazioni rispettivamente $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+10=0$ e $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-2=0$.

a) Trovare il centro C_1 e il raggio R_1 della sfera S_1, il centro C_2 e il raggio R_2 della sfera S_2 e un'equazione cartesiana per la retta r passante per P_1 e P_2;

b) trovare un'equazione cartesiana per il piano π_2 passante per Q e la cui giacitura contiene la giacitura di r e il vettore v e determinare se S_1 e S_2 sono secanti, tangenti o esterne l'una all'altra;

c) trovare un'equazione parametrica per la retta s (se esiste) intersezione di π_1 e π_2 e equazioni cartesiane per le rette (se esistono) contenenti i punti che hanno distanza 3 dal piano π_1 e 4 dal piano π_2.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(-1,0,0,0) = (-2t^2,0,0,0)$, $F_t(t,1,0,0) = (2t^3+t,t,0,0)$, $F_t(1,3,0,1) = (2t^2+3t-4, 3t+4, t, 4)$ e $F_t(0,0,1,-1) = (0,0,2-t,-t-4)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.

c) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

2. Calcolare autovalori e autovettori di A_1.

3. Calcolare la segnatura di ${}^tA_0 + A_0$.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A e B due matrici reali quadrate e simmetriche di ordine 4, supponiamo che A abbia segnatura $(3,1)$ e che B sia definita positiva:
Vero o Falso:

1. $A+B$ non è mai invertibile.

2. Se $A+B$ puo' avere segnatura $(1,3)$.

3. La matrice complessa $C = A + iB$ può avere determinante zero ($i^2 = -1$).

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 23.02.2009

Compito **C**

Esercizio 1.
Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano inoltre P_1, P_2 e Q i punti di coordinate rispettivamente $(-1,1,1), (3,3,2)$ e $(0,3,1)$, v il vettore ${}^t(1,2,2)$, π_1 il piano di equazione $2x+y-z-2=0$ e S_1, S_2 le due sfere di equazioni rispettivamente $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+8=0$ e $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+12=0$.

a) Trovare il centro C_1 e il raggio R_1 della sfera S_1, il centro C_2 e il raggio R_2 della sfera S_2 e un'equazione cartesiana per la retta r passante per P_1 e P_2;

b) trovare un'equazione cartesiana per il piano π_2 passante per Q e la cui giacitura contiene la giacitura di r e il vettore v e determinare se S_1 e S_2 sono secanti, tangenti o esterne l'una all'altra;

c) trovare un'equazione parametrica per la retta s (se esiste) intersezione di π_1 e π_2 e equazioni cartesiane per le rette (se esistono) contenenti i punti che hanno distanza 4 dal piano π_1 e 5 dal piano π_2.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $F_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $F_t(2,0,0,0) = (4t^2,0,0,0)$, $F_t(t,1,0,0) = (2t^3+t,t,0,0)$, $F_t(1,3,0,1) = (2t^2+3t+3, 3t+3, t, 4)$ e $F_t(0,0,1,-1) = (0,0,2-2t,-t-4)$.

1. Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$.

2. Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

3. Calcolare autovalori e autovettori di A_1.

4. Calcolare la segnatura di ${}^tA_0 + A_0$.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Siano A B due matrici reali quadrate e simmetrche di ordine 4, supponiamo che A abbia segnatura $(2,2)$ e che B sia definita positiva:
Vero o Falso:

1. $A - B$ è sempre invertibile.

2. Se $A - B$ può avere segnatura $(1,3)$.

3. La matrice complessa $C = A + iB$ può avere determinante zero ($i^2 = -1$).

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2008-2009
Prova scritta del 23.02.2009 Risultati

Nome: Cognome: Data nascita:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Compito **A** **B** **C** (crocettare)

ESERCIZIO 1

a)

b)

c)

ESERCIZIO 2

1.

2.

3.

4.

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

1) V F

2) V F

3) V F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

La matrice del compito A è

$$\begin{pmatrix} 2t^2 & t & -3 & -3 \\ 0 & t & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & -t & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice del compito B è

$$\begin{pmatrix} 2t^2 & t & -4 & -4 \\ 0 & t & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & -t & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice del compito C è

$$\begin{pmatrix} 2t^2 & t & 3 & 3 \\ 0 & t & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2-t & t \\ 0 & 0 & -t & 4 \end{pmatrix}$$

Compito A e B Diagonalizzabile per $\{t : -1 < t < 1, t \neq 1/2\}$.

Esercizio 3

iii) Se A e B sono simmetriche reali con B definita positiva $C = A + iB$ è sempre invertibile: Se $Cv = 0$ allora ${}^t\overline{v}Cv = 0$ ma allora il numero complesso

$$z =^t \overline{v}Av + i^t\overline{v}Bv = 0.$$

Ora ${}^t\overline{v}Av$ e ${}^t\overline{v}Bv$ sono reali (A e B sono hermitiane) in particolare abbiamo

$${}^t\overline{v}Av =^t \overline{v}Bv = 0,$$

Ma B è matrice simmetrica è definita positiva, quindi lo è come matrice hermitiana (i suoi autovalori sono positivi) quindi ${}^t\overline{v}Bv = 0$ implica $v = 0$ quindi C è invertibile.