Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta intermedia del 28.11.2007

Compito **A**

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x+y+z+aw = a^2-1 \\ x-ay-az+w = a \\ x+y+z = a+1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_4[x]$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f({}^t(1,0,0,0)) &= x^4+x^3+x^2+1, \\ f({}^t(1,1,0,0)) &= x^3+x^2+1, \\ f({}^t(1,1,1,0)) &= x^2+1, \\ f({}^t(1,1,1,1)) &= 1 \end{aligned}$$

e sia $g : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni polinomio p di grado minore o uguale a 4 la coppia di valori ${}^t(p(-1), p(0))$.

1. Verificare che g è lineare;
2. trovare la dimensione del nucleo di f e determinare se il polinomio $x^4 - x^2$ appartiene al nucleo di g e/o all'immagine di f;
3. calcolare $(g \circ f)({}^t(1,0,1,0))$ e $f^{-1}(x^4+x^2)$.

Esercizio 3. Sia A una matrice reale 3×3 di rango $r > 0$ (cioé $A \neq 0$) e I matrice identità di ordine 3 reale.
Vero o Falso:

a) $det A \neq det(-A) + r$

b) $det(A^2 + I)$ è sempre ≥ 0.

c) Se $det(A^2 - A) = r$ allora A è invertibile.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta intermedia del 28.11.2007

Compito **B**

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x - y + z + aw = a^2 - 1 \\ x + ay - az + w = a \\ x - y + z = a + 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_4[x]$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f({}^t(1,0,0,0)) = x^4 + x^3 + x + 1,$$
$$f({}^t(1,1,0,0)) = x^3 + x + 1,$$
$$f({}^t(1,1,1,0)) = x + 1,$$
$$f({}^t(1,1,1,1)) = 1$$

e sia $g : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni polinomio p di grado minore o uguale a 4 la coppia di valori ${}^t(p(0), p(1))$.

1. Verificare che g è lineare;
2. trovare la dimensione del nucleo di f e determinare se il polinomio $x^4 - x^2$ appartiene al nucleo di g e/o all'immagine di f;
3. calcolare $(g \circ f)({}^t(1,0,1,0))$ e $f^{-1}(x^3 + x)$.

Esercizio 3. Sia A una matrice reale 3×3 di rango $r > 0$ (cioé $A \neq 0$) e I matrice identità di ordine 3 reale.
Vero o Falso:

a) $detA \neq det(-A) - r$

b) $det(A^2 + 4I)$ è sempre ≥ 0.

c) Se $det(A^3 + A) = r$ allora A è invertibile.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta intermedia del 28.11.2007

Compito **C**

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x + y - z + aw = a^2 - 1 \\ x - ay + az + w = a \\ x + y - z = a + 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_4[x]$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f({}^t(1,0,0,0)) &= x^4 + x^2 + x + 1, \\ f({}^t(1,1,0,0)) &= x^2 + x + 1, \\ f({}^t(1,1,1,0)) &= x + 1, \\ f({}^t(1,1,1,1)) &= 1 \end{aligned}$$

e sia $g : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni polinomio p di grado minore o uguale a 4 la coppia di valori ${}^t(p(1), p(0))$.

1. Verificare che g è lineare;
2. trovare la dimensione del nucleo di f e determinare se il polinomio $x^4 - x^2$ appartiene al nucleo di g e/o all'immagine di f;
3. calcolare $(g \circ f)({}^t(1,0,1,0))$ e $f^{-1}(x^4 + x^2)$.

Esercizio 3. Sia A una matrice reale 3×3 di rango $r > 0$ (cioé $A \neq 0$) e I matrice identità di ordine 3 reale.
Vero o Falso:

a) $detA \neq det(-A) + r - 1$

b) $det(A^2 + 9I)$ è sempre ≥ 0.

c) Se $det(A^2 + A) = r$ allora A è invertibile.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta intermedia del 28.11.2007

Compito **D**

Esercizio 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a il seguente sistema lineare risulta compatibile e trovarne le soluzioni :

$$\begin{cases} x+y+z-aw=a^2-1 \\ x-ay-az-w=a \\ x+y+z=a+1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_4[x]$ l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} f({}^t(1,0,0,0)) &= x^4+x^3+x^2+x, \\ f({}^t(1,1,0,0)) &= x^3+x^2+x, \\ f({}^t(1,1,1,0)) &= x^2+x, \\ f({}^t(1,1,1,1)) &= x \end{aligned}$$

e sia $g:\mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni polinomio p di grado minore o uguale a 4 la coppia di valori ${}^t(p(0),p(-1))$.

1. Verificare che g è lineare;
2. trovare la dimensione del nucleo di f e determinare se il polinomio x^4-x^2 appartiene al nucleo di g e/o all'immagine di f;
3. calcolare $(g\circ f)({}^t(1,0,1,0))$ e $f^{-1}(x^3+x)$.

Esercizio 3. Sia A una matrice reale 3×3 di rango $r>0$ (cioé $A\neq 0$) e I matrice identità di ordine 3 reale.
Vero o Falso:

a) $detA \neq det(A^2)-r$

b) $det(A^2+16I)$ è sempre ≥ 0.

c) Se $det(A)=r-3$ allora A è invertibile.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta intermedia del 28.11.2007 Risultati

Nome: Cognome: Anno di immatric.

Compito **A** **B** **C** D (crocettare)

ESERCIZIO 1

a) valori per cui il sistema è risolubile

b) soluzioni

ESERCIZIO 2

a)

b)

c)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

a) V F

b) V F

c) V F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

Ogni esercizio esatto vale 1 punto.