Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta del 22.02.2008

Compito **A**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=0$, π il piano di equazione $2x+y+2z-1=0$, P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(0,-1,1)$ e $(-2,-1,0)$ e v il vettore ${}^t(1,1,3)$.

1. Determinare il centro C e il raggio R di S e un'equazione cartesiana per la retta r passante per P e la cui giacitura è generata da v;
2. determinare le posizioni relative di S e r, di π e S e di r e π;
3. trovare equazioni cartesiane per i piani (se esistono) ortogonali a π, passanti per Q e tangenti a S.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tale che:
$F_t(1,2,t) = (3+t, 3+t, 1+3t)$, $F_t(1,1,1) = (3,3,2+t)$, $F_t(2,2,5) = (9,9,7+2t)$,

a) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

b) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

c) Calcolare autovalori e autovettori di A_1.

d) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ la segnatura di ${}^tA_1 + A_1 + aI$, I matrice identità.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2. Date $A \in M$ e $B \in M$

Vero o Falso:

1. Se A e B sono nilpotenti allora $A+B$ è nilpotente;
2. Se A e B sono diagonalizzabili allora AB è diagonalizzabile;
3. Se A, B e $A+B$ sono nilpotenti allora $A-B$ è nilpotente.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta del 29.01.2008

Compito **B**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, π il piano di equazione $2x + y + 2z - 2 = 0$, P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(0, 0, 2)$ e $(-2, 0, 1)$ e v il vettore ${}^t(1, 2, 1)$.

1. Determinare il centro C e il raggio R di S e un'equazione cartesiana per la retta r passante per P e la cui giacitura è generata da v;
2. determinare le posizioni relative di S e r, di π e S e di r e π;
3. trovare equazioni cartesiane per i piani (se esistono) ortogonali a π, passanti per Q e tangenti a S.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tale che
$F_t(t, 1, 2) = (3 + 2t, 3 + 2t, 2 + 2t)$, $F_t(1, 1, 1) = (3, 3, 2 + t)$, $F_t(5, 2, 2) = (9, 9, 7 + 2t)$,

a) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

b) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

c) Calcolare autovalori e autovettori di A_1.

d) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ la segnatura di ${}^tA_1 + A_1 + aI$, I matrice identità.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2. Date $A \in M$ e $B \in M$

Vero o Falso:

1. Se A, B e $A + B$ sono diagonalizzabili allora $A - B$ è diagonalizzabile;
2. Se A e B sono nilpotenti allora $A + B$ è nilpotente;
3. Se A, B e $A - B$ sono nilpotenti allora $AB = 0$.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta del 22.02.2008

Compito **C**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z + 7 = 0$, π il piano di equazione $2x + y + 2z - 3 = 0$, P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(1, 1, 0)$ e $(-3, -1, -1)$ e v il vettore ${}^t(1, 2, -2)$.

1. Determinare il centro C e il raggio R di S e un'equazione cartesiana per la retta r passante per P e la cui giacitura è generata da v;
2. determinare le posizioni relative di S e r, di π e S e di r e π;
3. trovare equazioni cartesiane per i piani (se esistono) ortogonali a π, passanti per Q e tangenti a S.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tale che
$F_t(-t, 1, 2) = (3 - 2t, 3 - 2t, 2 - 2t)$, $F_t(1, 1, 1) = (3, 3, 2 - t)$, $F_t(5, 2, 2) = (9, 9, 7 - 2t)$,

a) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

b) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

c) Calcolare autovalori e autovettori di A_1.

d) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ la segnatura di ${}^tA_{-1} + A_{-1} + aI$, I matrice identità.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2. Date $A \in M$ e $B \in M$

Vero o Falso:

1. Se A e B sono nilpotenti allora $A + B$ è nilpotente;
2. Se A e B sono diagonalizzabili allora $A + BA$ è diagonalizzabile;
3. Se A, B e $A + B$ sono nilpotenti allora $AB + A$ è nilpotente.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008
Prova scritta del 22.02.2008

Compito **D**

Esercizio 1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$, π il piano di equazione $2x + y + 2z + 1 = 0$, P e Q i punti di coordinate rispettivamente $(0, 1, 1)$ e $(-2, -3, 0)$ e v il vettore ${}^t(1, -2, 0)$.

1. Determinare il centro C e il raggio R di S e un'equazione cartesiana per la retta r passante per P e la cui giacitura è generata da v;
2. determinare le posizioni relative di S e r, di π e S e di r e π;
3. trovare equazioni cartesiane per i piani (se esistono) ortogonali a π, passanti per Q e tangenti a S.

Punti (3+4+3)

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$,

$$F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tale che:
$F_t(1, 2, -t) = (3 - t, 3 - t, 1 - 3t)$, $F_t(1, 1, 1) = (3, 3, 2 - t)$, $F_t(2, 2, 5) = (9, 9, 7 - 2t)$,

a) Trovare la matrice A_t associata ad F_t nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

b) Dire per quali valore del parametro reale t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

c) Calcolare autovalori e autovettori di A_1.

d) Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ la segnatura di ${}^tA_{-1} + A_{-1} + aI$, I matrice identità.

Punti (4+5+3+3)

Esercizio 3. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2. Date $A \in M$ e $B \in M$

Vero o Falso:

1. Se A, B e $A + B$ sono diagonalizzabili allora $A - B$ è diagonalizzabile;
2. Se A e B sono nilpotenti allora $A + B$ è nilpotente;
3. Se A, B e $A + B$ sono nilpotenti allora $AB = BA$.

Punti (1+2+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2007-2008

Prova scritta del 22.2.2008 Risultati

Nome: Cognome: Data nascita:

Anno di corso: Mat. Fis. (crocettare)

Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**

Compito **A** **B** **C** **D** **(crocettare)**

ESERCIZIO 1

1)

2)

3)

ESERCIZIO 2

a)

b)

c)

d)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

1. V F

2. V F

3.] V F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$