

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007**

*Prova scritta del 22.02.2007*

**Compito A**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano  $P, Q$  e  $R$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 2, -6)$ ,  $(-1, -4, 4)$  e  $(1, -1, 5)$  e  $v$  il vettore  ${}^t(2, -1, 4)$ .

1. Scrivere equazioni parametriche per la retta  $r_1$  passante per  $P$  e  $Q$  e per la retta  $r_2$  passante per  $R$  e con giacitura generata da  $v$ ;
2. scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r_3$  parallela a  $r_1$  e passante per il punto  $C$  di coordinate  $(0, -1, 4)$ , determinare la posizione relativa di  $r_2$  ed  $r_3$  e trovare un vettore ortogonale alle giaciture di  $r_1$  ed  $r_2$ ;
3. verificare che  $r_1$  ed  $r_2$  sono sghembe, trovare equazioni cartesiane per due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  paralleli contenenti rispettivamente  $r_1$  ed  $r_2$  e un'equazione cartesiana per la sfera tangente a  $\pi_1$  in  $P$  e tangente anche a  $\pi_2$ .

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:  $F_t(0, 1, 0) = (0, 6t, 4t + 5)$ ,  $F_t(1, 1, 1) = (8t + 10, 10t - 5, 4t + 5)$ ,  $F_t(0, 1, -1) = (-5 - 4t, 2t + 5, 4t + 5)$ .

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare la segnatura di  $A_8 \cdot A_8$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $A$ , una matrice reale di ordine 4, simmetrica avente autovalori numeri interi:

*Vero o Falso:*

1.  $A$  può essere ortogonale.
2. Se la segnatura di  $A$  è  $(2, 2)$  allora  $A = B^2$  con  $B$  antisimmetrica reale.
3. La matrice  $2A^2 - 3A + 2I$  ( $I$  matrice identità) è definita positiva.

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007**

*Prova scritta del 22.02.2007*

**Compito B**

**Esercizio 1.** Sia  $Oxyz$  un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano  $P, Q$  e  $R$  i punti di coordinate rispettivamente  $(1, 0, 2)$ ,  $(-5, -2, -2)$  e  $(4, 1, 1)$  e  $v$  il vettore  ${}^t(4, 2, -1)$ .

1. Scrivere equazioni parametriche per la retta  $r_1$  passante per  $P$  e  $Q$  e per la retta  $r_2$  passante per  $R$  e con giacitura generata da  $v$ ;
2. scrivere equazioni cartesiane per la retta  $r_3$  parallela a  $r_1$  e passante per il punto  $C$  di coordinate  $(-2, -1, -3)$ , determinare la posizione relativa di  $r_2$  ed  $r_3$  e trovare un vettore ortogonale alle giaciture di  $r_1$  ed  $r_2$ ;
3. verificare che  $r_1$  ed  $r_2$  sono sghembe, trovare equazioni cartesiane per due piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  paralleli contenenti rispettivamente  $r_1$  ed  $r_2$  e un'equazione cartesiana per la sfera tangente a  $\pi_1$  in  $P$  e tangente anche a  $\pi_2$ .

**Punti (3+4+3)**

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:  $F_t(0, 0, 1) = (4t-5, 4t-5, 0)$ ,  $F_t(1, 1, 1) = (8t, 10t-5, 4t+5)$ ,  $F_t(1, 0, 1) = (8t, 4t-5, 0)$ .

- a) Trovare la matrice  $A_t$  associata ad  $F_t$  nelle basi canoniche di  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Dire per quali valore del parametro reale  $t$ ,  $A_t$  è diagonalizzabile sui reali.
- c) Calcolare autovalori e autovettori di  $A_1$ .
- d) Calcolare la segnatura di  $A_9 \cdot A_9$ .

**Punti (4+5+3+3)**

**Esercizio 3.** Sia  $A$ , una matrice reale di ordine 4, simmetrica avente autovalori numeri interi:

*Vero o Falso:*

1.  $A$  può essere nilpotente.
2. Se  $A = B^3 B$  simmetrica allora la sua segnatura non è  $(2, 2)$ .
3. La matrice  $5A^2 - 7A + 3I$  ( $I$  matrice identità) è sempre definita positiva.

**Punti (1+2+2)**

**Corso di Algebra lineare - a.a. 2006-2007**

*Prova scritta del 22.2.2007* Risultati

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Data nascita: \_\_\_\_\_  
Anno di corso: \_\_\_\_\_ Mat. \_\_\_\_\_ Fis. \_\_\_\_\_ (crocettare)  
Programma (per studenti di matematica anni precedenti) **Nuovo** **Precedente**

**Compito**      **A**      **B**      **(crocettare)**

**ESERCIZIO 1**

- 1)
- 2)
- 3)

**ESERCIZIO 2**

- a)
- b)
- c)
- d)

**ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)**

- 1) V      F
- 2) V      F
- 3) V      F

La mancata restituzione o compilazione del modulo nei suoi dati generali (nome cognome etc.) comporta l'esclusione dall'esame. La mancata compilazione dei valori di risposta comporta penalizzazione di voto. L'elaborato deve essere consegnato insieme a questo modulo e deve contenere nome e cognome dello studente. Il procedimento non deve essere riportato su questo modulo. Il foglio del testo degli esercizi non deve essere consegnato.

$$\begin{pmatrix} 4t + 5 & 0 & 4t + 5 \\ 0 & 6t & 4t - 5 \\ 0 & 4t + 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4t + 5 & 0 & 4t - 5 \\ 0 & 6t & 4t - 5 \\ 0 & 4t + 5 & 0 \end{pmatrix}$$