Corso di Geometria 1 - a.a. 2002-2003
Prova scritta del 27.11.2002 compito A

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$.

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4t \\ 2 & 3 & 4 & t \\ -1 & -2 & t & t \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix}$$

Si calcoli, al variare di t:

a) il determinante di A_t;

b) il rango di A_t.

Punti (4+3)

Esercizio 2. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3 : v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,10,1)$.

Si noti che i vettori v_i sono linearmente indipendenti. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(v_1) = v_2$, $F(v_2) = (0,0,1)$, $F(v_3) = 2v_1$.

a) Trovare la matrice A associata ad F nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

b) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(F)$ e dell'immagine di F.

c) Posto $w = (2,2,3)$ trovare le soluzioni del problema lineare $Ax =^t w$.

Punti (5+3+3)

Esercizio 3. Si ponga $V = \mathbb{R}_2[x]$ e $W = \mathbb{R}_4[x]$ (dove $\mathbb{R}_n[x]$ denota lo spazio dei polinomi reali di grado minore o uguale a n) e si consideri l'applicazione $f : V \to W$ che manda $p(x)$ in $p(y^2+1)$. Sia inoltre $g : W \to W$ l'applicazione che manda $p(y)$ in $p(y) - p(-y)$.

1. Si dimostri che f è lineare e se ne calcoli il rango;

2. si dimostri che g è lineare e si calcoli la dimensione di $\ker g$;

3. si dimostri che $\mathrm{im} f \subseteq \ker g$: vale l'uguaglianza?

Punti (2+2+2)

Esercizio 4. Per ogni matrice quadrata X indichiamo con $r(X)$ e $\det(X)$ ripettivamente il rango e il determinante di X. Siano A, B e C matrici reali di ordine 2.
Vero o Falso:

a) se $det(B) \neq 0$ $r(AB) \geq r(BA)$.

b) se $det(B) = 0$ e $det(AC) = 0$ allora $r(AC) = r(BC)$.

c) se $det(B) \neq 0$ allora $r(ABC) = r(AC)$.

Punti (2+2+2)

Corso di Geometria 1 -a. a. 2002-03 Prova scritta 27.11.2002 compito A Risultati

Nome:
Anno di corso   Corso di laurea

ESERCIZIO 1

a) $\det(A_t) =$

b) $r(A_t) =$

ESERCIZIO 2

a) $A =$

b) $\dim \ker(F) =$ $\dim im(F) =$

c) Soluzioni:

ESERCIZIO 3

a) $r(f) =$

b) $\dim \ker(f) =$

c) $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ SI   NO   (crocettare)

ESERCIZIO 4 (crocettare V=vero o F= falso)

a) V   F

b) V   F

c) V   F

I risultati devono essere riportati in questo foglio, ma **l'elaborato deve essere consegnato**.

Il compito si ritiene superato se si ottengono 18 punti.

Corso di Geometria 1 - a.a. 2002-2003
Prova scritta del 27.11.2003 compito B

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$.

$$A_t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & t \\ 2 & 2 & 3 & 4t \\ -2 & -2 & t & t \\ 0 & 0 & -t & -t \end{pmatrix}$$

Si calcoli, al variare di t:

a) il determinante di A_t;

b) il rango di A_t.

Punti (4+3)

Esercizio 2. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,10,1)$.

Si noti che i vettori v_i sono linearmente indipendenti. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(v_1) = -v_2$, $F(v_2) = (0,0,-2)$, $F(v_3) = 2v_1$.

a) Trovare la matrice A associata ad F nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$.

b) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(F)$ e dell'immagine di F.

c) Posto $w = (2,2,3)$ trovare le soluzioni del problema lineare $Ax =^t w$.

Punti (5+3+3)

Esercizio 3. Si ponga $V = \mathbb{R}_2[x]$ e $W = \mathbb{R}_4[x]$ (dove $\mathbb{R}_n[x]$ denota lo spazio dei polinomi reali di grado minore o uguale a n) e si consideri l'applicazione $f : V \to W$ che manda $p(x)$ in $p(y^2 - 1)$. Sia inoltre $g : W \to W$ l'applicazione che manda $p(y)$ in $p(y) + p(-y)$.

1. Si dimostri che f è lineare e se ne calcoli il rango;
2. si dimostri che g è lineare e si calcoli la dimensione di $\ker g$;
3. si calcoli la dimensione di $\ker g \cap \mathrm{im} f$.

Punti (2+2+2)

Esercizio 4. Per ogni matrice quadrata X indichiamo con $r(X)$ e $\det(X)$ ripettivamente il rango e il determinante di X. Siano A, B e C matrici reali di ordine 2.
Vero o Falso:

a) se $det(B) \neq 0$ $r(CB) \geq r(BC)$.

b) se $det(B) \neq 0$ e $det(AC) \neq 0$ allora $r(AC) = r(BC)$.

c) se $det(B) \neq 0$ allora $r(CBA) = r(CA)$.

Punti (2+2+2)

Corso di Geometria 1 -a. a. 2002-03 Prova scritta 27.11.2002 compito B Risultati

Nome:
Anno di corso Corso di laurea

ESERCIZIO 1

a) $\det(A_t) =$

b) $r(A_t) =$

ESERCIZIO 2

a) $A =$

b) dim $\ker(F) =$ dim $\mathrm{im}(F) =$

c) Soluzioni:

ESERCIZIO 3

a) $r(f) =$

b) $\dim \ker(f) =$

c) $\dim(\mathrm{im}(f) \cap \ker(g)) =$

ESERCIZIO 4 (crocettare V=vero o F= falso)

a) V F

b) V F

c) V F

I risultati devono essere riportati in questo foglio, ma **l'elaborato deve essere consegnato**.

Il compito si ritiene superato se si ottengono 18 punti.