Esercizi

Useremo le seguenti notazioni: M una varietà differenziabile, la sfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ lo spazio proiettivo.

1) Sia M una varietà $p \in M$ un suo punto. Si considerino $\mathcal{M} = \{f \in A = C^\infty(M) : f(p) = 0\}$.
   a) Dimostrare che $\mathcal{M}$ è un ideale di A.
   b) Dimostrare che ogni derivazione X in p definisce un funzionale lineare su $\mathcal{M}$.
   c) Dimostrare che $X(\mathcal{M}^2) = 0$ $\mathcal{M}^2$ sono le funzioni che si annullano di ordine almeno 2 in p
   d) Dimostrare che D_p è isomorfo al duale dello spazio vettoriale

$$V = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2}.$$

2) a) Siano f e g in $\mathscr{C}^\infty(M)$ allora si ha $d(f+g) = df + dg$, $d(fg) = fdg + gdf$.
   b) Dimostrare che T_{S^1} è diffeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.
   c) Dimostrare che T_{S^3} è diffeomorfo a $S^3 \times \mathbb{R}^3$.
   d) Dire se T_{S^2} è diffeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$.
   e) Dimostrare che se $A \subset M$ è una sottovarietà e $\chi : A \to N$ è l'inclusione allora $D\chi(T_A) \subset T_N$ è una sottovarietà di T_N diffeomorfa a T_A.

3) Supponiamo che un gruppo di Lie G operi sulla varietà differenziabile M in modo tale che, per ogni $p \in M$, esista un intorno U di p e $U \cap gU = \emptyset$, se $g \neq e$, dove $g \in G$ ed e è l'elemento neutro di G. Provare che:
   a) dimostrare che G ha la topologia discreta.
   b) lo spazio delle orbite M/G ha una struttura di varietà differenziabile;
   c) se M è connessa ed orientabile, allora M/G è orientabile se e solo se tutti gli elementi di G conservano l'orientamento di M.

   Dedurre, come conseguenza del criterio precedente, che:
   i) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, la bottiglia di Klein e la striscia di Möbius non sono orientabili;
   ii) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è orientabile se e solo se n è dispari.

4) Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$:

$$F(x, y, z, t) = (x^3 + y, z^3, t^2 + t^3)$$

   e sia:

$$X = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + 6y^2 + 4z^2 + t^2 = 1\}.$$

   a) Dimostrare che X è una varietà differenziabile e calcolarne la dimensione.
   b) Dimostrare che X è connessa e compatta.
   c) Determinare i punti critici della restrizione $f := F_{|X} : X \to \mathbb{R}^3$.

5) Sia $S^n \subset R^{n+1}$ la sfera unitaria. Si considerino la proiezione ortogonale $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to B$, dove B è un sottospazio vettoriale di R^{n+1} di dimensione $k > 0$, e la restrizione $f = \pi_{S^n}$ di π alla sfera.
   a) Determinare i punti critici e i valori critici di f.
   b) Dire se esiste una applicazione liscia $g : S^3 \to S^2$ senza punti critici?
   c) Dire se può esistere una applicazione liscia $g : S^2 \to S^1$ senza punti critici.
   d) Dire se può esistere una applicazione liscia $g : S^4 \to S^2$ senza punti critici (!).

6) Si consideri la sfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ Siano (x, y, z) le coordinate dello spazio. Si consideri il la circonferenza C ottenuta tagliando S^2 con il piano $z = \frac{1}{2}$.
   a) Dire se il trasporto parallelo su C rispetto alla metrica indotta su S^2 dalla metrica euclidea è l'identità
   b) Trovare esplicitamente una metrica g su S^2 per cui C sia geodetica.
   c) Dire se il trasporto parallelo per una geodetica chiusa su una superficie è necessariamente l'identità.

7) Si consideri la forma: $\omega = xdy + ydx + dz \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$.
   a) Trovare due campi di vettori X_1, X_2 linearmente indipendenti tali che $\omega(X_i) \equiv 0$, per $i = 1, 2$.
   b) Provare che $\mathcal{D} = ker\ \omega$ è una distribuzione di 2-piani su $\mathbb{R}^3$ integrabile.
   c) Sia $X = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ con l'orientazione per la quale una base $\{v\}$ di T_xX è positiva se $\{n, v, (001)\}$ è una base positiva di $\mathbb{R}^3$, dove n è la normale esterna a X nel piano $z = 0$.
   d) Calcolare $\int_X \omega$.

8) Sia ∇ la connessione standard su $\mathbb{R}^m$ Si considerino i campi in $\mathbb{R}^m$ $F_{i,j} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$, $E_{i,j} = F_{i,j} - F_{j,i}$, e $I = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.
   a) Si calcoli il flusso di tali campi.
   b) Verificare lo spazio generato dagli $E_{i,j}$ definisce una distribuzione integrabile in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.
   c) Si verifichi $\nabla_{F_{ij}} F_{s,k} = 0$se $j \neq s$ e $\nabla_{F_{ij}} F_{j,k} = F_{i,k}$.
   d) Interpretiamo il campo $A = \sum_{i,j} a_{ij} F_{i,j}$ come una matrice $A = (a_{i,j})$. Se $B = (a_{i,j})$ si calcoli $\nabla_A B$ (risultato AB).
   e) Si calcoli $[A, B]$ (risultato $AB - BA$)
   f) Si calcoli $\nabla_{E_{ij}} E_{s,k}$.
   g) Si costruiscano tutti X i campi che commutano con i $F_{i,j}$.

9) Si calcoli il tensore di Riemann per le seguenti metriche su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
   a) $(x^2)dx^2 + dy^2 + (x^2 + 1)dz^2$;
   b) $(x^2 + 4)dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy$;
   c) $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.
   Per ciascuna delle precedenti dire se $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è geodeticamente completo.

10) Si consideri lo spazio $(\mathbb{R}^4)^+ = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 > 0\}$ dotato della metrica Riemanniana (detta metrica di Willmore):
$$ds^2 = (x_1)^4(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + x_1^{-2} dx_4^2.$$
   Provare che tale metrica è Ricci-piatta, nonostante che il tensore di curvatura Riemanniano non sia nullo.

11) Si calcolino i gruppi di coomologia di de Rham per le seguenti varietà
   a) S^n
   b) $S^2 \times S^3$
   c) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
   d) La grasmanniana $G(2, 4)$ dei due piani di $\mathbb{R}^4$.