

**TESTI DELLE PROVE SCRITTE  
DI ANALISI MATEMATICA 4  
DA GENNAIO 2013**

**ORDINATE PER ANNO  
IN ORDINE CRONOLOGICO INVERSO**

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 15 gennaio 2024

**Esercizio 1.** Posto, per  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \max\{0, 1 - t^2\}$ , si consideri la successione di funzioni

$$u_n(x) = f(n(x - n)) \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per  $n \rightarrow \infty$  studiare la convergenza quasi ovunque in  $\mathbb{R}$  e le convergenze in tutti gli spazi  $L^p(\mathbb{R})$ , per  $1 \leq p \leq \infty$  [**Suggerimento:** trattare dapprima i casi  $p = 1$  e  $p = \infty$ ], della successione  $u_n$ .

**Esercizio 2.** Dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  sullo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi([-2, 2]) = 1, \quad \varphi((-\infty, 0)) = -1, \quad \varphi([0, +\infty)) = 2$$

e inoltre tale misura non sia né assolutamente continua né singolare rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue. Trovata la misura  $\varphi$ , individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .

**Esercizio 3.** Indicati con  $\ell^1$  ed  $\ell^\infty$  gli usuali spazi di successioni reali  $a = (a_1, a_2, \dots)$  tali che  $\|a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$  e  $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty$  e con  $c_0$  il sottospazio di  $\ell^\infty$  delle successioni infinitesime, sia  $T : \ell^1 \rightarrow \ell^\infty$  l'applicazione definita da  $(Ta)_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- Provare che l'operatore  $T$  è ben definito, lineare e continuo. Calcolare la norma di  $T$  in  $\mathcal{L}(\ell^1, \ell^\infty)$ .
- Dimostrare che  $T$  è iniettivo.
- Provare che il rango (o immagine)  $T(\ell^1)$  è strettamente contenuto in  $c_0$  e contiene strettamente  $\ell^1$ .
- Verificare che l'operatore  $S := T^{-1}|_{\ell^1}$ , definito dunque come l'operatore inverso di  $T$  ristretto a  $\ell^1$ , è un elemento di  $\mathcal{L}(\ell^1, \ell^1)$  e calcolarne la norma.

**Esercizio 4.** Nello spazio di Hilbert reale  $V = L^2(1, +\infty)$  si definisca

$$\Lambda(f) = \int_{(1, +\infty)} \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{per ogni } f \in V.$$

Fissati gli insiemi  $X = \{f \in V : \Lambda(f) = 0\}$  e  $K = \{f \in V : \Lambda(f) \geq 2\}$ , rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

- Provare che  $X$  e  $K$  sono sottoinsiemi non vuoti di  $V$  e che entrambi sono chiusi in  $V$ .
- $X$  e  $K$  sono sottospazi di  $V$ ? Individuare in ogni caso i due sottospazi chiusi  $X^\perp$  e  $K^\perp$ .
- L'elemento  $g = \chi_{(1, e)}$ , funzione caratteristica del sottoinsieme  $(1, e) \subset (1, +\infty)$  (cioè, uguale a 1 su  $(1, e)$  e a 0 altrove), appartiene a  $X$  o a  $K$ ?
- Calcolare esplicitamente, se possibile, le proiezioni dell'elemento  $g$  su  $X$  e  $K$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 21 febbraio 2024

**Esercizio 1.** Si considerino le funzioni  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione  $\{f_n\}$  in  $[-1, 1]$  e individuare la funzione limite  $f$ .
- b) Provare che sia le  $f_n$  che la  $f$  limite appartengono a  $L^p([-1, 1])$  per ogni  $1 \leq p \leq \infty$  e discutere la convergenza di  $f_n$  a  $f$  in ognuno di questi spazi.

**Esercizio 2.** In questo esercizio ci occupiamo delle funzioni  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente continue e indichiamo con  $f'$  la derivata q.o. di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

- a) Ricordare la definizione di funzione assolutamente continua in  $[-1, 1]$  e discutere la relazione tra queste funzioni e quelle a variazione limitata nello stesso intervallo.
- b) Ricordare la caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue in  $[-1, 1]$  tramite la formula fondamentale del calcolo.
- c) Provare che l'insieme  $AC([-1, 1])$  delle funzioni  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente continue è uno spazio vettoriale.
- d) Posto, per  $f \in AC([-1, 1])$ ,  $\|f\| = |f(0)| + \int_{[-1, 1]} |f'| d\mu$  dove  $\mu$  denota la misura unidimensionale di Lebesgue, discutere se  $\|\cdot\|$  definisce effettivamente una norma in  $AC([-1, 1])$ .

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio  $X = L^1(0, +\infty)$  reale.

- a) Dare un esempio di sottospazio chiuso di  $X$  non banale (cioè, diverso dal sottospazio nullo e da tutto lo spazio).
- b) Dare un esempio di sottospazio denso in  $X$  non banale.
- c) Fornire infine un esempio di un sottospazio di  $X$  che non sia né chiuso né denso in  $X$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = x^2$  per  $-\pi < x \leq \pi$ .

- a) Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier.
- b) Discutere convergenza puntuale, uniforme e in  $L^2(-\pi, \pi)$  della serie di Fourier di  $f$ .
- c) In base ai risultati di convergenza puntuale/uniforme, calcolare la somma delle serie numeriche  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 19 giugno 2024

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < 1 \end{cases}, \quad x \in (0, 1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

per  $n \rightarrow \infty$  studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e nei vari spazi  $L^p(0, 1)$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $L^2(1, +\infty)$  reale e si definisca

$$K = \{f \in L^2(1, +\infty) : -1 \leq f(x) \leq e^{-x} \text{ per q.o. } x \in (1, +\infty)\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

- a) L'insieme  $K$  potrebbe essere vuoto?  $K$  è convesso? è un sottoinsieme chiuso di  $L^2(1, +\infty)$ ?
- b) Mostrare che l'elemento  $g = \chi_{(2,3)} - \chi_{(1,2)}$ , dove  $\chi_A$  indica la funzione caratteristica del sottoinsieme  $A \subseteq (1, +\infty)$  (cioè,  $\chi_A$  vale 1 su  $A$  e 0 altrove), appartiene ad  $L^2(1, +\infty)$ .
- c) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento  $g$  su  $K$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 16 luglio 2024

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x-1}{x} \chi_{[n, n+1[}(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

dove  $x \mapsto \chi_A(x)$  denota la funzione caratteristica dell'insieme  $A \subset (0, +\infty)$ .

- a) Discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $(0, +\infty)$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;
- b) studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $(0, +\infty)$ ;
- c) indicata con  $f$  la funzione limite delle  $f_n$ , si chiede se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, +\infty)} f_n d\mu$  esiste e vale

$$\int_{(0, +\infty)} f d\mu.$$

**Esercizio 2.** In questo esercizio ci occupiamo di spazi di Hilbert.

- a) Richiamare la definizione di spazio pre-hilbertiano  $H$  in ambito complesso e reale e introdurre la norma  $\| \cdot \|_H$  associata al prodotto scalare.
- b) Controllare le proprietà di norma per  $\| \cdot \|_H$  e dire in quali condizioni uno spazio pre-hilbertiano è anche uno spazio di Hilbert.
- c) Sia ora  $H$  lo spazio di Hilbert  $L^2(-\pi, \pi)$  reale: fornire esplicitamente un esempio di sottospazio  $S$  di  $H$  che sia diverso dal sottospazio costituito dal solo elemento nullo e da tutto lo spazio  $H$ .
- d) Nello spazio  $H = L^2(-\pi, \pi)$  dare anche un esempio di convesso chiuso non vuoto  $C \subset H$  che non sia un sottospazio e che contenga almeno i due elementi rappresentati dalle funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ . Introdotto l'esempio, fornire le relative spiegazioni per convessità e chiusura.

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 29 agosto 2024

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $\mathbb{R}$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;
- b) studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ ;
- c) indicata con  $f$  la funzione limite delle  $f_n$ , discutere l'integrabilità di  $f$  in  $\mathbb{R}$  e la validità del passaggio al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

**Esercizio 2.** In questo esercizio ci occupiamo di norme. Introdotto lo spazio vettoriale reale  $X = C^1([0, 1])$  e il sottoinsieme  $V = \{f \in X : f(0) = 0\}$ ,

- a) controllare che  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $X$ .
- b) Dimostrare che  $\|f\|_a = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$  definisce una norma in  $X$ .
- c) Provare che  $\|f\|_b = \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$  non è una norma in  $X$  mentre risulta essere una norma in  $V$ .
- d) Discutere l'equivalenza o meno delle due norme  $\|\cdot\|_a$  e  $\|\cdot\|_b$  in  $V$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 25 settembre 2024

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{nx+1} & \text{se } 0 < x < n \\ 0 & \text{se } x \geq n \end{cases}, \quad x \in (0, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots,$$

per  $n \rightarrow \infty$  studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e nei vari spazi  $L^p(0, +\infty)$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  reale e si definisca

$$K = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : |f(x)| \leq |\sin x| \text{ per q.o. } x \in (-\pi, \pi)\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

- a) L'insieme  $K$  potrebbe essere vuoto?  $K$  è convesso? è un sottoinsieme chiuso di  $L^2(\mathbb{R})$ ?
- b) Indicata con  $\chi_A$  indica la funzione caratteristica del sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  (cioè,  $\chi_A$  vale 1 su  $A$  e 0 altrove), mostrare che l'elemento

$$g(x) = \chi_{(0, 2\pi)}(x) \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

appartiene ad  $L^2(\mathbb{R})$ .

- c) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento  $g$  su  $K$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 10 gennaio 2023

**Esercizio 1.** Posto, per  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$ ,  $f_n(x) = \frac{n^\alpha}{(x+1)^{n+1}}$ , si consideri la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ .

- Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $(0, +\infty)$  rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue.
- Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  si discuta la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura per la serie di funzioni.
- indicata con  $s_\alpha(x)$  la somma della serie per gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  e gli  $x \in (0, +\infty)$  per cui è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue di  $s_\alpha$ .

**Esercizio 2.** In questo esercizio ci occupiamo delle funzioni  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a variazione limitata e indichiamo con  $V_{[-1,1]}(f)$  la variazione totale di  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

- Ricordare le definizioni di funzione a variazione limitata e di variazione totale, ed enunciare il risultato che lega le funzioni a variazione limitata alle funzioni monotone crescenti nello stesso intervallo.
- Dimostrare che se  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è a variazione limitata in  $[-1, 0]$  e in  $[0, 1]$  separatamente, allora  $f$  è a variazione limitata in  $[-1, 1]$ .
- Provare che l'insieme  $BV([-1, 1])$  delle funzioni  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a variazione limitata è uno spazio vettoriale.
- Posto, per  $f \in BV([-1, 1])$ ,  $\|f\| = \int_{[-1,1]} |f(x)| dx + V_{[-1,1]}(f)$ , l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue, discutere se  $\|\cdot\|$  definisce effettivamente una norma in  $BV([-1, 1])$ .

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$  si considerino le norme

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty; \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \text{per } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Dimostrare che  $\|\cdot\|_\infty$  è equivalente a  $\|\cdot\|_p$  per qualunque  $p \in [1, \infty)$ .
- Se  $A$  è il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  dato dal segmento di estremi  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , con estremi inclusi, provare che  $A$  è convesso e chiuso in  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$  per qualunque  $p \in [1, \infty]$ .
- Per ogni  $p \in [1, \infty]$  calcolare la distanza, espressa in norma  $\|\cdot\|_p$ , del punto  $(0, 0)$  dall'insieme  $A$  e trovare i punti di  $A$  che realizzano tale distanza.

**Esercizio 4.** Siano  $X = L^2(-\pi, \pi)$  reale e  $V = \left\{ f \in X : \int_{(-\pi, \pi)} f(x) dx = 0 \right\}$ .

- Dimostrare che  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $X$ . È anche chiuso in  $X$ ? In ogni caso individuare il sottospazio  $V^\perp$ .
- $V$  è dunque spazio prehilbertiano rispetto allo stesso prodotto scalare di  $X$ .  $V$  è anche completo, cioè risulta esso stesso uno spazio di Hilbert?
- Provare che  $V$  ammette un sistema ortonormale completo.

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 febbraio 2023

**Esercizio 1.** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni  $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , misurabili secondo Lebesgue e tali che  $-1 \leq f_n(x) \leq |x|^{-1/2}$  q.o. in  $(-1, 1)$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre, sappiamo che la successione  $\{f_n\}$  converge a una funzione  $f$  in misura.

- Richiamare la convergenza in misura in  $(-1, 1)$  per  $\{f_n\}$  e provare che esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  tale che  $f_{n_k} \rightarrow f$  q.o. e in  $L^1(-1, 1)$ .
- Dimostrare in seguito che per ogni  $p$  con  $1 \leq p < 2$  si hanno le convergenze  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(-1, 1)$  per tutta la successione.
- Costruire un esempio di successione  $\{f_n\}$  nelle condizioni dell'enunciato e tale che  $f_n \not\rightarrow f$  in  $L^2(-1, 1)$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ , dove  $\mathcal{L}$  sta per la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e  $\mu$  denota la misura di Lebesgue.

- Richiamare la definizione di misura relativa su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  ed enunciare il teorema di Hahn di decomposizione di una misura relativa;
- dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  che sia  $\mu$ -assolutamente continua e tale che
$$\varphi([-2, 2]) = 1, \quad \varphi((0, 1)) = -2, \quad \varphi((-1, +\infty)) = 3;$$
- dare un esempio di misura relativa  $\psi$  che sia  $\mu$ -singolare e che soddisfi le stesse misurazioni espresse qui sopra per  $\varphi$ ;
- per entrambe le misure scrivere esplicitamente una decomposizione di Hahn di  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $z = (z_k)$  un elemento fissato nello spazio  $c_0$  delle successioni reali infinitesime. Ora, nello spazio  $\ell^1$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$  si consideri l'operatore  $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$  che a  $x = (x_k)$  associa  $y = Tx$  con  $y_k = z_k x_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

- Provare che  $T$  è ben definito, lineare e continuo.
- Calcolare la norma  $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^1; \ell^1)}$ .
- È possibile dare condizioni su  $z = (z_k)$  al fine di garantire iniettività e/o suriettività dell'operatore  $T$ ?

**Esercizio 4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = \frac{|x|}{\pi}$  per  $-\pi \leq x < \pi$ .

- Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier.
- Discutere convergenza puntuale, uniforme e in  $L^2(-\pi, \pi)$  della serie di Fourier di  $f$ .
- In base ai risultati trovati, calcolare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 13 giugno 2023

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \sqrt{n} e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ ;
- b) discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $\mathbb{R}$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;
- c) indicata con  $f$  la funzione limite delle  $f_n$ , si chiede se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \quad \text{esiste e vale} \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

**Esercizio 2.** Nello spazio di Hilbert reale  $H = L^2(0,1)$  si consideri il sottoinsieme  $K = \left\{ v \in H : \int_{(0,1)} |v(x)|^2 dx \leq 2 \right\}$ .

- a) Dimostrare che  $K$  è non vuoto, convesso e chiuso in  $H$ .
- b) Ricordare il teorema delle proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione della funzione  $f(x) = 3x$ ,  $x \in (0,1)$ , su  $K$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 13 luglio 2023

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ ;
- b) discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $\mathbb{R}$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;
- c) indicata con  $f$  la funzione limite delle  $f_n$ , si chiede se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \text{ esiste e vale } \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

**Esercizio 2.** Nello spazio di Hilbert reale  $H = L^2(1, +\infty)$  si consideri il sottoinsieme

$$K = \{v \in H : |v(x)| \leq 2 \text{ per q.o. } x \in (1, +\infty)\}.$$

- a) Provare che  $K$  è non vuoto, convesso e chiuso in  $H$ .
- b) Ricordare il teorema delle proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione su  $K$  della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x} & \text{se } x \in (1, 5), \\ 0 & \text{se } x \in [5, +\infty). \end{cases}$$

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2023

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n^2|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Provare che  $f_n \rightarrow 0$  q.o. in  $\mathbb{R}$ . Discutere anche le convergenze quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ .
- b) Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato provare l'integrabilità della funzione  $f_n$  in  $\mathbb{R}$ .
- c) Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcolare le norme  $\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  e  $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$ .
- d) Discutere, usando eventualmente le conclusioni di c), la convergenza  $f_n \rightarrow 0$  in  $L^p(\mathbb{R})$  con  $1 < p < \infty$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di Banach  $\ell^1$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  converga, munito dell'usuale norma. Inoltre, per ogni intero  $n \geq 1$  sia  $T_n$  l'operatore da  $\ell^1$  in sè che a  $x = (x_k)$  associa  $y = T_n x$  con

$$y_k = \begin{cases} x_k & \text{per } k < n \\ 0 & \text{per } k = n \\ x_{k-1} & \text{per } k > n \end{cases}.$$

- a) Provare che per  $n$  fissato  $T_n$  è lineare e continuo.
- b) Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcolare  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^1; \ell^1)}$ .
- c) Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato studiare iniettività e suriettività dell'operatore  $T_n$ .
- d) Per  $x = (x_k)$  fissato in  $\ell^1$ , possiamo concludere che  $T_n x \rightarrow x$  in  $\ell^1$  per  $n \rightarrow \infty$ ?

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 25 settembre 2023

**Esercizio 1.** Si considerino le funzioni  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ \sqrt{\frac{n}{nx+1}} & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \text{per } n \in \mathbb{N} (n \geq 1).$$

- a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $[0, 1]$  e individuare la funzione limite  $f$ ;
- b) discutere l'integrabilità secondo Lebesgue delle funzioni  $f_n$  per  $n \in \mathbb{N}$  fissato e della funzione limite  $f$  in  $[0, 1]$ ;
- c) si chiede ora se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n d\mu \quad \text{esiste e vale} \quad \int_{[0,1]} f d\mu.$$

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $\ell^2$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Si definisca poi

$$K = \left\{ x = (x_k) \in \ell^2 : \sum_{k=1}^{10} |x_k|^2 \leq 1 \right\}.$$

Svolgere i seguenti punti motivando opportunamente le risposte date.

- a) Provare che  $K$  è convesso e chiuso in  $\ell^2$ .
- b) Quali degli elementi  $e^n$  della base canonica, cioè quelli che hanno la  $n$ -ima componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a 0, appartengono a  $K$ ?
- c) Mostrare che l'elemento  $w = (w_k)$ , con  $w_k = 1/k$  per  $k \in \mathbb{N}$ , appartiene ad  $\ell^2$ , ma non appartiene a  $K$ .
- d) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento  $w$  su  $K$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 11 gennaio 2022

**Esercizio 1.** Per  $n \in \mathbb{N}$  definiamo  $f_n(x) := \frac{|\ln(n^7 x^2)|}{3 + n^4 x^2}$  se  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f_n(0) := 1$ .

- Discutere l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione  $f_n$  in  $\mathbb{R}$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato.
- Studiare la convergenza quasi ovunque della serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Se  $C \subseteq \mathbb{R}$  indica l'insieme degli  $x$  in cui la serie converge e  $s : C \rightarrow \mathbb{R}$  denota la somma della serie, discutere la misurabilità dell'insieme  $C$  e della funzione  $s$ .
- Vale la seguente uguaglianza  $\int_C s \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n \, dx$  ? e inoltre  $s \in L^1(C)$  ?

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di misura  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$  dove  $\mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri interi positivi e  $\#$  denota la misura del contare. Data una successione reale non negativa  $\{a_n\}$ , definiamo

$$\varphi(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_n(E) \quad \text{per ogni insieme } E \subseteq \mathbb{N}, \quad (\diamond)$$

dove  $\delta_n$  indica la misura di Dirac concentrata in  $n$ , per  $n \in \mathbb{N}$ .

- Provare che  $\varphi$  è una misura su  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ;  $\varphi$  è  $\#$ -assolutamente continua o  $\#$ -singolare?
- Se ora  $\{a_n\}$  denota una successione reale di segno qualunque, dare condizioni su  $\{a_n\}$  affinché  $\varphi$  in  $(\diamond)$  sia ben definita e risulti una misura relativa [Suggerimento:  $a_n = (-1)^n/n$  non funziona, perchè?].
- Dare un esempio di successione  $\{a_n\}$  nelle condizioni di b) per la quale risulti  $\varphi(\mathbb{N}) = 1$  e al contempo  $\varphi(\{k \in \mathbb{N} : k \text{ è primo}\}) = -5$ .

**Esercizio 3.** Per  $f \in L^2(1, +\infty)$  definiamo la successione

$$z = (z_n), \quad \text{con } z_n = \int_{(n, n+1)} \frac{f(x)}{x} \, dx \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue.

- Provare che l'operatore  $T$  che associa a  $f$  la successione  $z = (z_n)$  è ben definito da  $L^2(1, +\infty)$  in  $\ell^1$ , cioè che  $z \in \ell^1$  per ogni  $f \in L^2(1, +\infty)$ .
- Dimostrare che  $T$  è lineare e limitato da  $L^2(1, +\infty)$  in  $\ell^1$ .
- L'operatore  $T$  è iniettivo? è suriettivo?

Si intende che tutti gli spazi normati considerati sono reali.

**Esercizio 4.** Siano  $H$  e  $V$  due spazi di Hilbert reali, entrambi contenenti almeno un elemento di norma non nulla, con norme hilbertiane  $\|\cdot\|_H$  e  $\|\cdot\|_V$ . Nello spazio prodotto  $W = H \times V$  si considerino le norme

$$\|(u, v)\|_1 := \|u\|_H + \|v\|_V, \quad \|(u, v)\|_2 := (\|u\|_H^2 + \|v\|_V^2)^{1/2}, \quad (u, v) \in W.$$

Non è richiesta la verifica che  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  siano norme.

- Dimostrare che  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  sono equivalenti.
- Controllare che  $\|\cdot\|_2$  è indotta da un prodotto scalare. Per quanto riguarda  $\|\cdot\|_1$ , scegliendo opportunamente due coppie  $(u, v), (u', v') \in W$  provare che  $\|\cdot\|_1$  non verifica l'identità del parallelogramma.
- Nel caso  $H = V = \mathbb{R}$  con  $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|_V = |\cdot|$ , determinare il più piccolo insieme convesso e chiuso di  $W$  contenente l'insieme  $A := \{(u, v) \in W : \|u\|_H^{1/2} + \|v\|_V^{1/2} \leq 1\}$  (eventualmente  $A$  stesso, se  $A$  è convesso e chiuso). Inoltre, se  $P$  è l'operatore di proiezione sul sottospazio  $H \times \{0\}$ , caratterizzare l'insieme  $P(A)$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 febbraio 2022

**Esercizio 1.** Sia  $\Omega$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\{z_n\}$  una successione di funzioni misurabili definite su  $\Omega$  a valori in  $\mathbb{R}$ . Tale successione risulta convergente q.o. in  $\Omega$  a una funzione  $z$ . Si abbia inoltre

$$\int_{\Omega} e^{z_n(x)} dx \leq 100 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

- Discutere la convergenza quasi ovunque della successione  $\{e^{z_n}\}$ .
- Le funzioni  $z$  ed  $e^z$  risultano misurabili?
- La funzione  $e^z$  è integrabile in  $\Omega$  oppure non possiamo concludere nulla sull'integrabilità di  $e^z$ ?

**Esercizio 2.** Ci occupiamo di funzioni reali definite nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

- Adattare le definizioni di funzione a variazione limitata e funzione assolutamente continua in  $[-1, 1]$ ; dire per quali funzioni esiste la derivata q.o. e per quali vale la formula fondamentale del calcolo (estesa all'integrale di Lebesgue).
- Calcolare la derivata q.o.  $g'$  della funzione  $g(x) = |x|^{\pi/5}$ ,  $x \in [-1, 1]$ . La funzione  $g$  è assolutamente continua in  $[-1, 1]$ ? Motivare per bene la risposta.
- Determinare per quali  $p \in [1, \infty]$  la  $g'$  di cui in b) appartiene ad  $L^p([-1, 1])$ .

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio  $X = L^1(\mathbb{R})$  e, per ogni intero  $n \geq 1$ , sia  $T_n$  l'operatore lineare (non si richiede il controllo della linearità) da  $X$  in sé che a  $u$  associa  $v = T_n(u)$  con  $v(x) = u(x)$  per  $x < 0$ ,  $v(x) = u(x+n)$  per  $x \geq 0$ .

- Provare che per  $n$  fissato  $T_n$  è ben definito (cioè,  $T_n(u) \in X$  per ogni  $u \in X$ ) e continuo.
- Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcolare  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X;X)}$ .
- Per  $n$  fissato studiare iniettività e suriettività dell'operatore  $T_n$ .
- Per  $u \in X \equiv L^1(\mathbb{R})$  fissata, studiare la convergenza, quasi ovunque e in  $L^1(\mathbb{R})$ , della successione di funzioni  $\{T_n(u)\}$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = \pi + x$  per  $-\pi < x \leq 0$ , e da  $f(x) = x - \pi$  per  $0 < x \leq \pi$ .

- Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier.
- Detta  $S(x)$  la somma della serie, dire per quali  $x \in \mathbb{R}$  sia ha che  $S(x) \neq f(x)$ .
- In base ai risultati trovati, calcolare la somma della serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 14 giugno 2022

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0,$$

- discutere la misurabilità delle funzioni  $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto alla misura unidimensionale  $\mu$  di Lebesgue ;
- per  $n \rightarrow \infty$  studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione  $\{f_n\}$  in  $(0, +\infty)$ ;
- per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, determinare per quali  $p$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , vale l'inclusione  $f_n \in L^p(0, +\infty)$ ;
- indicata con  $f$  la funzione limite q.o. delle  $f_n$ , si chiede per quali valori dei  $p \in [1, \infty]$  di cui al punto c) si abbia  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(0, +\infty)} = 0$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di Hilbert reale  $H = L^2(-1, 1)$  e si definisca

$$C = \left\{ v \in H : \int_{(-1,1)} |v(x) - x|^2 d\mu \leq 1 \right\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

- L'insieme  $C$  potrebbe essere vuoto?  $C$  è convesso? è un sottoinsieme chiuso di  $H$ ?
- Per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la funzione costante  $u(x) = a$ ,  $x \in (-1, 1)$ , appartiene a  $C$ ?
- Ricordare l'enunciato del teorema delle proiezioni (relativo ai convessi) in spazi di Hilbert e per  $a = 1$  calcolare esplicitamente la proiezione di  $u$  su  $C$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 14 luglio 2022

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f_n(x) = \frac{2n\sqrt[3]{x} + 3}{1 + (nx)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

per  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato studiare misurabilità e integrabilità in  $\mathbb{R}$  della funzione  $f_n$ .
- b) Dimostrare esplicitamente che  $|f_n(x)| \leq \frac{5}{n}$  per ogni  $x$  tale che  $|x| \geq 1$ .
- c) La successione  $f_n$  converge q.o. in  $\mathbb{R}$ ? converge anche quasi uniformemente e in misura?
- d) Esaminare la convergenza in  $L^1(\mathbb{R})$  per la successione  $f_n$ .

**Esercizio 2.** Siano  $X$  lo spazio  $\mathbb{R}^3$  munito della norma  $\|\cdot\|_\infty$  e  $Y$  lo spazio  $\mathbb{R}^2$  munito della norma  $\|\cdot\|_1$ .

- a) Richiamare la definizione delle due norme citate nei rispettivi spazi.
- b) Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : X \rightarrow Y \quad \text{tale che} \quad T(1, 1, 1) = (0, 1).$$

- c) Una volta scritto l'operatore, trovare una costante  $C > 0$  tale che  $\|y\|_1 \leq C\|x\|_\infty$  per ogni  $x \in X$ ,  $y = T(x) \in Y$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2022

**Esercizio 1.** Si considerino le funzioni

$$f_n(x) := \frac{1}{2n} e^{-n|x|}, \quad n \in \mathbb{N} (n \geq 1), \quad \text{e la serie } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

- a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della serie di funzioni (NB: della serie e non della successione  $\{f_n\}$ ) in  $\mathbb{R}$  rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue;
- b) per  $n \geq 1$  fissato discutere l'integrabilità secondo Lebesgue delle funzioni

$$x \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad \text{in } \mathbb{R};$$

- c) indicata con  $s(x)$  la somma della serie per gli  $x \in \mathbb{R}$  per cui è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue per questa funzione.

**Esercizio 2.** Sia  $H$  lo spazio di Hilbert  $\mathbb{R}^2$  munito dell'usuale prodotto scalare componente per componente. Posto

$$X = \{(x, y) \in H : x \leq 0, x + y = 0\},$$

- a) si chiede se  $X$  è un sottospazio di  $H$ .
- b) Provare che  $X$  è chiuso in  $H$ .
- c) Esiste la proiezione del vettore  $(2, -1)$  su  $X$ ? Nel caso calcolarla esplicitamente.
- d) Individuare l'insieme ortogonale  $X^\perp \subseteq H$  di  $X$ , giustificando per bene la risposta.

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 27 settembre 2022

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{nx}, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Per  $n \geq 1$  fissato discutere il segno, la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue delle funzioni  $f_n$  in  $[-1, 1]$ .
- Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione  $\{f_n\}$  in  $[-1, 1]$ .
- Esiste finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-1, 1]} f_n(x) dx ?$$

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $\ell^2$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Inoltre, per ogni intero  $n \geq 1$  sia  $T_n$  l'operatore da  $\ell^2$  in sè che a  $x = (x_k)$  associa  $y = T_n x$  con

$$y_k = x_k \quad \text{per } k \leq n, \quad y_k = 0 \quad \text{per } k > n.$$

- Provare che per  $n \geq 1$  fissato  $T_n$  è lineare e continuo.
- Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcolare  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2; \ell^2)}$ .
- Studiare iniettività e suriettività dell'operatore  $T_{10}$ .
- Esiste un operatore  $T \in \mathcal{L}(\ell^2; \ell^2)$  tale che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si abbia  $(T_n x)_k \rightarrow (Tx)_k$  per  $n \rightarrow \infty$ , cioè la convergenza componente per componente?

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 14 dicembre 2022

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\ln n}{1 + (nx)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Per  $n \geq 1$  fissato discutere la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue di  $f_n$ .
- b) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ .
- c) Esaminare anche la convergenza della successione  $\{f_n\}$  in  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di misura  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ , dove  $\mathcal{L}$  sta per la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e  $\mu$  denota la misura di Lebesgue. Dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  che non sia né  $\mu$ -assolutamente continua né  $\mu$ -singolare, e tale che

$$\varphi([-1, 2]) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi((0, +\infty)) = -1.$$

Inoltre, per tale misura relativa  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .

**Esercizio 3.** Introdotto l'insieme

$$X = \{f \in C^1([0, +\infty)) : f, f' \text{ sono limitate in } [0, +\infty) \text{ e } f(0) = 0\},$$

controllare che  $X$  è uno spazio vettoriale e provare che le seguenti che

$$\|f\|_c = \sup_{x \geq 0} |f(x)| + \sup_{x \geq 0} |f'(x)|, \quad \|f\|_d = \sup_{x \geq 0} |f'(x)|$$

sono entrambe norme in  $X$ . Queste due norme sono tra loro equivalenti?

**Esercizio 4.** Nello spazio di Hilbert reale  $H = L^2(-1, 1)$  si consideri il sottoinsieme

$$K = \left\{ v \in H : \int_{(-1,1)} 3|v(x) - x|^2 d\mu \leq 2 \right\}$$

- a) Dimostrare che  $K$  è non vuoto, convesso e chiuso in  $H$ .
- b) Richiamare l'enunciato del Teorema delle Proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione su  $K$  della funzione nulla  $f(x) = 0$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 11 gennaio 2021

**Esercizio 1.** Si considerino le funzioni

$$f_n(x) := \min \{1, (nx)^{-(n+1)}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{e la serie } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{per } x \in (0, +\infty).$$

- Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $(0, +\infty)$  rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue.
- Si consideri ora la serie di funzioni (NB: la serie e non la successione  $\{f_n\}$ ) e se ne discuta la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura;
- indicata con  $s(x)$  la somma della serie per gli  $x \in (0, +\infty)$  per cui è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue per questa funzione.

**Esercizio 2.** Nello spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_{A \cap [0, +\infty)} \frac{\sin x}{x^{3/2}} d\mu - 2\mu(A \cap [-1, 0]) + \pi \delta_1(A), \quad A \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue,  $\mu$  è la misura unidimensionale di Lebesgue e  $\delta_1$  indica la misura di Dirac concentrata in 1.

- Provare che  $\varphi$  è una misura relativa su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ .
- Per tale misura  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .
- $\varphi$  è  $\mu$ -assolutamente continua oppure  $\mu$ -singolare?
- Calcolare, ovvero scrivere esplicitamente, la derivata di Radon-Nikodym  $\frac{d\varphi}{d\mu}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione reale assegnata. Si consideri poi, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  fissato, il funzionale  $T_n : \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\ell^1$  qui è spazio vettoriale reale) definito da

$$T_n x := \sum_{k=1}^n y_k x_k, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1.$$

- Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, provare che  $T_n$  è lineare e continuo. Inoltre calcolarne la norma.
- Si assuma ora che  $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sia un elemento di  $c$  (successioni reali convergenti). La successione di funzionali  $\{T_n\}$  risulta convergente nello spazio  $(\ell^1)' = \mathcal{L}(\ell^1, \mathbb{R})$ ? In caso affermativo, identificare il funzionale limite  $T$  e calcolarne la norma in  $(\ell^1)'$ .

**Esercizio 4.** Si consideri lo spazio  $L^2(-1, 1)$  delle (classi di) funzioni  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili e di quadrato sommabile in  $(-1, 1)$ . Sia inoltre  $C \subset L^2(-1, 1)$  il sottoinsieme delle funzioni  $f$  tali che

$$|f(x)| \leq 1 \quad \text{per q.o. } x \in (-1, 0), \quad \int_{(0,1)} |f(x)|^2 dx \leq 1.$$

- Provare che  $C$  è un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso in  $L^2(-1, 1)$ .
- Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } -1 < x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases},$$

si provi che  $g \in L^2(-1, 1)$ .

- Determinare la proiezione di  $g$  su  $C$ , giustificando per bene la risposta.

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 febbraio 2021

**Esercizio 1.** Per  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [0, 1]$  si consideri la funzione  $u_n(x) = (n+3)x(1-x)^n$ . Inoltre, sia  $v$  una funzione integrabile secondo Lebesgue in  $[0, 1]$ .

- Discutere la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue in  $[0, 1]$  della funzione prodotto  $f_n(x) = u_n(x)v(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .
- Discutere la convergenza **quasi ovunque** della successione  $\{f_n\}$  e la convergenza **uniforme** della successione  $\{u_n\}$  in  $[0, 1]$ .
- Calcolare il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx$ , motivando per bene la risposta data.

**Esercizio 2.** Sia  $AC([-1, 1])$  l'insieme delle funzioni reali definite in  $[-1, 1]$  e assolutamente continue in questo intervallo.

- Ricordare la definizione e le proprietà delle funzioni assolutamente continue, in particolare il legame con le funzioni a variazione limitata e con la formula fondamentale del calcolo (estesa all'integrale di Lebesgue).
- Dimostrare che  $AC([-1, 1])$  è uno spazio vettoriale e che

$$\|f\| = |f(0)| + \int_{[-1,1]} |f'(t)| dt, \quad f \in AC([-1, 1]), \text{ con } f' \text{ derivata q.o. di } f,$$

definisce una norma in  $AC([-1, 1])$ .

- Lo spazio  $AC([-1, 1])$  è completo rispetto alla norma qui definita? Motivare per bene la risposta.

**Esercizio 3.** Nello spazio  $\ell^2$  delle successioni complesse  $x = (x_1, x_2, \dots)$  tali che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$

converga, si consideri il funzionale  $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ ,  $x = (x_n) \in \ell^2$ .

- Provare che  $L$  è ben definito, lineare e limitato.
- L'insieme  $N = \{x \in \ell^2 : L(x) = 0\}$  è un sottospazio di  $\ell^2$ ? È chiuso in  $\ell^2$ ?
- Sia  $e^k$  l'elemento di  $\ell^2$  con componente  $k$ -ima 1 e tutte le altre componenti nulle: provare che  $e^k \notin N$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .
- Fissato ora  $e^1$ , individuare la proiezione di  $e^1$  sul sottospazio chiuso  $N^\perp$ , giustificando per bene la risposta.

**Esercizio 4.** Posto  $[t] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq t\}$  per  $t \in \mathbb{R}$ , sia  $f(x)$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  tale che  $f(x) = 2[2x/\pi] + 1$  per  $x \in [-\pi, \pi)$ .

- Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

- Discutere convergenza puntuale, uniforme e in  $L^2(-\pi, \pi)$  della serie trovata.
- In particolare, la serie di Fourier converge nei punti  $x = -\pi/2$  e  $x = \pi/6$ ? Se sì, quanto valgono le somme in questi punti?

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 16 giugno 2021

**Esercizio 1.** Per  $x \in \mathbb{R}$  e  $n = 1, 2, \dots$  definiamo le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{1/3} + \sqrt[5]{x^4}} & \text{se } 0 < |x| \leq n, \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e se } |x| > n. \end{cases}$$

Si consideri ora la successione di funzioni  $\{f_n\}$  e, per  $n \rightarrow \infty$ , si studino le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e nei vari spazi  $L^p(\mathbb{R})$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

a) Dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  tale che

$$\varphi([-1, 2]) = -2, \quad \varphi(\{0\}) = 2, \quad \varphi((0, +\infty)) = 1;$$

b) per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .

c) Richiamare la definizione di misura relativa ed enunciare il teorema di Hahn di decomposizione di una misura relativa.

**Esercizio 3.** Sia  $T$  l'operatore che a  $f \in L^\infty(1, +\infty)$  associa la funzione  $g = T(f)$ , con  $g(x) = f(x)e^{1-x}$  per ogni  $x > 1$ .

a) Provare che l'operatore  $T$  è ben definito da  $L^\infty(1, +\infty)$  in  $L^1(1, +\infty)$ , cioè che  $T(f) \in L^1(1, +\infty)$  per ogni  $f \in L^\infty(1, +\infty)$ .

b) Dimostrare che  $T : L^\infty(1, +\infty) \rightarrow L^1(1, +\infty)$  è lineare e limitato. Calcolare la norma di  $T$ .

c) Se come spazio immagine si prende  $L^p(1, +\infty)$  con  $1 < p \leq \infty$ , si può concludere ancora qualcosa relativamente ai punti a) e b)?

**Esercizio 4.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $\ell^2$  reale e si definisca

$$C = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 : (n+1)^{-2} \leq x_n \leq 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

a) L'insieme  $C$  potrebbe essere vuoto?  $C$  è convesso? è un sottoinsieme chiuso di  $\ell^2$ ?

b) Mostrare che l'elemento  $y = (y_1, y_2, \dots)$ , con  $y_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n}$  per  $n \in \mathbb{N}$ , appartiene ad  $\ell^2$ .

c) Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento  $y$  su  $C$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 15 luglio 2021

**Esercizio 1.** Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n \arctan(3n^2)} \quad \text{per } x \in [-1, 1].$$

- Discutere la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della serie di funzioni;
- indicata con  $s(x)$  la somma della serie per gli  $x \in [-1, 1]$  per cui è definita, valutare la misurabilità e l'integrabilità secondo Lebesgue della funzione  $s$  in  $[-1, 1]$  o, eventualmente, in sotto-intervalli.

**Esercizio 2.** Sia  $K \subset L^2(-\pi, \pi)$  l'insieme costituito da tutte le (classi di) funzioni  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  tali che  $f$  è una funzione pari (o, più precisamente, esiste un rappresentante della classe che è pari).

- Provare che l'insieme  $K$  è non vuoto.  $K$  è convesso? è un sottoinsieme chiuso di  $L^2(-\pi, \pi)$ ?
- Dato  $w \in L^2(-\pi, \pi)$ , provare che la proiezione di  $w$  su  $K$  è data da

$$P_K(w)(x) = \frac{w(x) + w(-x)}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

- Considerato il funzionale  $J : L^2(-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  definito da

$$J(v) = \int_{(-\pi, \pi)} \left( (v(x) - \sin x)^2 + \cos x \right) dx,$$

dire se  $J$  ammette minimi in  $K$  e, in caso affermativo, ricavarli esplicitamente.

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 17 dicembre 2021

**Esercizio 1.** Per  $n \in \mathbb{N}$  si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ ;
- discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $\mathbb{R}$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;

- indicata con  $f$  la funzione limite delle  $f_n$ , si chiede se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$  esiste e vale  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ .

**Esercizio 2.** Per  $1 \leq p < \infty$  si consideri lo spazio di Banach  $\ell^p$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$  converga, munito della norma usuale. Notiamo che, fissata una successione  $y = (y_k) \in \ell^2$ , questa successione genera un operatore  $L_y : \ell^2 \rightarrow \ell^1$  definito da  $L_y(x) := (x_k y_k)$ ,  $x = (x_k) \in \ell^2$ .

- Verificare linearità e continuità di  $L_y$ .
- Provare che  $\|L_y\|_{\mathcal{L}(\ell^2; \ell^1)} \leq \|y\|_{\ell^2}$  per ogni  $y \in \ell^2$ .
- Se invece si fissa  $y = (y_k)$  in  $\ell^4$ , lo stesso operatore  $L_y$  è ancora ben definito da  $\ell^2$  in  $\ell^1$ ?

**Esercizio 3.** Nello spazio di Hilbert  $H = L^2(0, 1)$  si consideri il sottoinsieme  $X$  delle funzioni costanti e la funzione  $f(x) = |x|^{-1/3}$ ,  $x \in (0, 1)$ .

- Dire perché  $f \in H$  e perché  $X$  è un sottospazio di  $H$ .
- $X$  è chiuso in  $H$ ?
- Individuare ed esplicitare il sottospazio chiuso  $Y = X^\perp$ .
- Trovare la proiezione di  $f$  su  $X$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 13 gennaio 2020

**Esercizio 1.** Sia  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$  lo spazio di misura unidimensionale di Lebesgue, dove  $\mathcal{L}$  è la  $\sigma$ -algebra dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  misurabili secondo Lebesgue e  $\lambda$  denota la misura di Lebesgue. Siano inoltre  $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ ,  $g(x) = \max\{0, x^3\}$ , per  $x \in \mathbb{R}$ , e si considerino le funzioni di insieme

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda, \quad \nu(E) = \int_E g d\lambda \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{L}.$$

Rispondere ora a ciascuna delle seguenti domande e giustificare le risposte.

- a)  $\mu$  e  $\nu$  sono misure?    b) sono misure relative?    c)  $\nu$  è  $\sigma$ -finita?
- d)  $\mu$  e  $\nu$  sono assolutamente continue rispetto a  $\lambda$ ?
- e) se  $E \in \mathcal{L}$  è tale che  $\lambda(E) \neq 0$ , possiamo concludere che  $\mu(E) \neq 0$ ?
- f)  $\lambda$  è  $\nu$ -a.c.?    g)  $\mu$  è  $\nu$ -a.c.?    h)  $\mu$  e  $\nu$  sono  $\lambda$ -singolari?

**Esercizio 2.** Siano  $d \in \mathbb{N}$  e  $\lambda$  un parametro reale fissato. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} e^{-n|x|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{S})$$

- a) Ricordando che  $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dx = \pi^{d/2}$ , controllare che per  $\lambda \in \mathbb{R}$  fissato le ridotte della serie in (S) sono funzioni integrabili secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}^d$ .
- b) Al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$  studiare la convergenza quasi ovunque della serie in  $\mathbb{R}^d$ .
- c) Con riferimento al punto precedente, studiare anche le convergenze quasi uniforme e in misura.
- d) Per quali  $\lambda \in \mathbb{R}$  la somma della serie in (S) risulta una funzione integrabile in  $\mathbb{R}^d$ ?

**Esercizio 3.** Si consideri l'insieme  $V$  delle funzioni  $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue e tali che  $\|u\|_a := \sup_{t \geq 0} |e^t u(t)| < +\infty$ . Controllare che  $V$  è uno spazio vettoriale e che  $\|\cdot\|_a$  definisce una norma in  $V$ . Lo spazio  $V$  coincide con l'insieme delle funzioni continue e limitate su  $[0, +\infty)$ ?

**Esercizio 4.** Posto

$$C := \left\{ v \in L^2(0, 1) : \int_{(0,1)} v(x) dx = 0 \right\}$$

- a) e osservato che  $C$  è un sottoinsieme di  $L^1(0, 1)$  (perché?), dimostrare che  $C$  è un sottospazio di  $L^2(0, 1)$  ed è anche chiuso in  $L^2(0, 1)$ .
- b) Sia  $f(x) = \ln(1/x)$  per  $x \in (0, 1)$ , provare che  $f \in L^2(0, 1)$  e determinare la proiezione di  $f$  su  $C$  giustificando per bene la risposta.

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 22 aprile 2020

**Esercizio 1.** Posto  $\phi_n(x) := \frac{n^2 e^{x^2} + 1}{n^2 e^{x^2} + 2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dimostrare che

- per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $u \in L^2(\mathbb{R})$  si ha  $\phi_n u \in L^2(\mathbb{R})$ ;
- per ogni  $u \in L^2(\mathbb{R})$  si ha  $\phi_n u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$  q.o. in  $\mathbb{R}$  ed in  $L^2(\mathbb{R})$ ;
- se  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  in  $L^2(\mathbb{R})$  allora  $\phi_n u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$  in  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione a variazione limitata nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  e sia  $g : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  una funzione strettamente crescente.

- Mostrare che la funzione composta  $f \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è a variazione limitata in  $[0, 1]$ .
- Provare che la variazione totale di  $f \circ g$  in  $[0, 1]$  è minore uguale della variazione totale di  $f$  in  $[a, b]$ .
- Se la funzione  $g : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  è anche suriettiva, si può concludere qualcosa di più specifico rispetto al punto b)?

**Esercizio 3.** Ci occupiamo di spazi di Hilbert reali e del teorema delle proiezioni in questi spazi.

- Richiamare l'enunciato del teorema delle proiezioni nella versione per sottoinsiemi convessi.
- Dare un esempio di spazio di Hilbert  $H$  che sia reale e infinito-dimensionale, introducendo anche prodotto scalare e norma in  $H$ .
- Nello spazio  $H$  considerato in b), fornire esplicitamente un esempio di convesso chiuso non vuoto  $K \subset H$  che non sia un sottospazio e che contenga almeno due elementi distinti, con le relative spiegazioni per convessità e chiusura.

**Esercizio 4.** Posto  $f(x) = |\sin x|$  per  $x \in \mathbb{R}$ ,

- studiare la periodicità e le eventuali simmetrie di questa funzione;
- sviluppare  $f$  in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

- discutere la convergenza puntuale, uniforme e in  $L^2(-\pi, \pi)$  della serie trovata.

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 16 giugno 2020

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n+1} \\ x^{-1/4} & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & \text{se } 1 < x < n+1 \\ 0 & \text{se } x \geq n+1 \end{cases}, \quad x \in (0, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots,$$

per  $n \rightarrow \infty$  studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e nei vari spazi  $L^p(0, +\infty)$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $\ell^2$  reale e si definisca

$$K = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 : -1 \leq x_n \leq 2^{3-n} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}.$$

Rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

- L'insieme  $K$  potrebbe essere vuoto?  $K$  è convesso? è un sottoinsieme chiuso di  $\ell^2$ ?
- Mostrare che l'elemento  $w = (w_1, w_2, \dots)$ , con  $w_n = (-1)^n/n$  per  $n \in \mathbb{N}$ , appartiene ad  $\ell^2$ .
- Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento  $w$  su  $K$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 9 luglio 2020

**Esercizio 1.** Si consideri lo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  misurabili secondo Lebesgue.

- Dare un esempio di misura  $\mu$  su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  tale che  $\mu(-\infty, 0) = +\infty$  e  $\mu([1, +\infty)) = 2$ ;
- richiamare le definizioni di misura e misura relativa e sottolineare le differenze tra i due concetti;
- dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  tale che

$$\varphi([-2, 1]) = -3, \quad \varphi(\{0\}) = 5, \quad \varphi((0, +\infty)) = 3;$$

- per tale misura relativa  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .
- Introdurre ed enunciare il teorema di Hahn di decomposizione di una misura relativa.

**Esercizio 2.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert reale e sia  $M$  un suo sottoinsieme non vuoto. Definiamo

$$M^\perp = \{x \in H : (x, y) = 0 \text{ per ogni } y \in M\}.$$

- Provare che  $M^\perp$  è un sottospazio chiuso di  $H$ ;
- se consideriamo ora l'insieme  $(M^\perp)^\perp$ , questo insieme ha qualche relazione con  $M$ ?
- Posto ora  $H = \mathbb{R}^2$  con l'usuale prodotto scalare, determinare esplicitamente  $M^\perp$  se  $M$  è il segmento chiuso di estremi  $(1, 1)$  e  $(2, 2)$ .
- Sempre per  $H = \mathbb{R}^2$  con l'usuale prodotto scalare, determinare esplicitamente  $M^\perp$  nel caso in cui  $M = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 10 settembre 2020

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

- a) discutere le convergenze quasi ovunque e quasi uniforme in  $\mathbb{R}$ ;
- b) per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcolare le norme  $\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  e  $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}$ ;
- c) discutere, usando eventualmente le conclusioni di b), la convergenza di  $\{f_n\}$  in  $L^p(\mathbb{R})$  con  $1 < p < \infty$ .

**Esercizio 2.** Posto  $\phi(x) := x^2$  e  $\psi(x) = x$  per  $x \in [0, 1]$ , si consideri

$$C := \{v \in L^2(0, 1) : \phi(x) \leq v(x) \leq \psi(x) \text{ per quasi ogni } x \in [0, 1]\}.$$

- a) Dimostrare che  $C$  è un convesso chiuso e non vuoto di  $L^2(0, 1)$ .
- b) Se  $f(x) = 1 - x$  per  $x \in [0, 1]$ , determinare la proiezione di  $f$  su  $C$  giustificando per bene la risposta.

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 28 settembre 2020

**Esercizio 1.** Posto, per  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + n^2(x - n)^2} & \text{se } n - 1 < x < n + 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

- a) Perché le funzioni  $f_n$  sono (misurabili e) integrabili in  $\mathbb{R}$ ?
- b) Studiare la convergenza quasi ovunque della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- c) È possibile applicare alla serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se sì, quali? Se no, perché?

**Esercizio 2.** Si consideri l'insieme  $V$  delle funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue e limitate su tutto  $\mathbb{R}$ .

- a) Perché  $V$  è uno spazio vettoriale?
- b) Controllare se  $\|u\|_a := \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|$ ,  $\|u\|_b := \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} |u(t)| dt$ ,  $u \in V$ , definiscono due norme in  $V$ .
- c) Provare che lo spazio  $V$  risulta completo rispetto alla norma  $\|\cdot\|_a$ .
- d) La successione  $f_n(t) = \min\{n, |t|\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , risulta di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_b$ ?

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 4 dicembre 2020

**Esercizio 1.** Sia  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$  lo spazio di misura unidimensionale di Lebesgue, dove  $\mathcal{L}$  è la  $\sigma$ -algebra dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  misurabili secondo Lebesgue e  $\lambda$  denota la misura unidimensionale di Lebesgue.

- Dare un esempio di misura  $\mu$  su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  tale che  $\mu(-\infty, 0) = 3$  e  $\mu([1, +\infty)) = +\infty$ .
- Richiamare le definizioni di misura e misura relativa e sottolineare le differenze tra i due concetti.
- Dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  tale che

$$\varphi([-2, 1]) = 2, \quad \varphi(\{0\}) = -1, \quad \varphi((0, +\infty)) = -3;$$

- per tale misura relativa  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .
- Dare un esempio di misura relativa  $\psi$  che sia assolutamente continua rispetto a  $\lambda$  e tale che  $\psi(\mathbb{R}) = -4$ .

**Esercizio 2.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} x^{-1/\pi} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n+1} \\ e^{-nx} & \text{se } x \geq \frac{1}{n+1} \end{cases}, \quad x \in (0, +\infty), \quad n = 1, 2, \dots,$$

- per  $n \rightarrow \infty$  studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura.
- Studiare poi la convergenza o meno nei vari spazi  $L^p(0, +\infty)$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f$  una funzione assegnata in  $L^2(0, 2\pi)$ .

- Dato  $\varepsilon > 0$ , è possibile approssimare  $f$  con una funzione  $g_\varepsilon \in C^0([0, 2\pi])$  tale che  $\|f - g_\varepsilon\|_{L^2(0, 2\pi)} \leq \varepsilon$ ?
- Calcolare il valore del limite per  $n \rightarrow \infty$  della successione  $\int_{(0, 2\pi)} f(x) \sin(nx) dx$ .
- Dopo aver risposto a b), studiare il comportamento della stessa successione nel caso in cui  $f \in L^1(0, 2\pi)$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 gennaio 2019

**Esercizio 1.** Posto  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$  per  $x \in \mathbb{R}$ , si consideri la serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , dove  $f_n(x) := \psi(n^2(x-n))$  per  $x \in \mathbb{R}$ .

- Dimostrare che  $\psi$  è integrabile secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}$  e che  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 1$  [**Suggerimento:** può essere utile studiare l'integrale doppio  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ ].
- Studiare la convergenza in  $L^1(\mathbb{R})$  della **serie** di funzioni  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  (NB: non confondere con la **successione**  $\{f_n\}$ ).
- discutere la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Indicata con  $\lambda$  la misura di Lebesgue unidimensionale in  $\mathbb{R}$  e con  $\mathcal{L}$  la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}$ , si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = 2\lambda(A \cap [0, 2]) - 3 \int_{A \cap (-\infty, 0)} e^x d\lambda + \int_A \frac{\sin x}{1+x^2} d\lambda, \quad A \in \mathcal{L}.$$

Provare che  $\varphi$  è una misura relativa su  $\mathbb{R}$ ; dire se  $\varphi$  è  $\lambda$ -a.c. oppure  $\lambda$ -singolare oppure né  $\lambda$ -a.c. né  $\lambda$ -singolare; scrivere la derivata di Radon–Nikodym di  $\varphi$ .

**Esercizio 3.** Sia  $X$  lo spazio di tutte le classi di funzioni  $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili e uguali tra loro q.o. tali che

$$N(u) = \int_{(-1,1)} \sqrt{|u(x)|} dx < +\infty.$$

- Provare che  $X$  è uno spazio vettoriale e che  $N(\cdot)$  non definisce una norma in  $X$ .
- Posto  $d(u, v) = N(u - v)$  per  $u, v \in X$ , dimostrare che  $d$  è una distanza in  $X$ .
- Provare che  $L^p(-1, 1) \subset X$  per ogni  $p \in [1, \infty]$ .
- Provare che se  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(-1, 1)$ , allora  $d(u_n, u) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = 0$  per  $-\pi \leq x \leq 0$ , e da  $f(x) = 1$  per  $0 < x < \pi$ .

- Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier.
- Detta  $S(x)$  la somma della serie, calcolare  $S(\pi/2)$ .
- Calcolare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 22 febbraio 2019

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N},$$

- discutere le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $(-1, 1)$ .
- Per quali  $p \in [1, \infty]$  le funzioni  $f_n$  appartengono a  $L^p(-1, 1)$ ?
- Per i  $p$  di cui al punto **b)**, si discuta la convergenza di  $\{f_n\}$  in  $L^p(-1, 1)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f : [0, 2/\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \cos(1/x) & \text{se } 0 < x \leq 2/\pi, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- La funzione  $f$  è continua in  $[0, 2/\pi]$ ? è monotona?
- Segnalare i punti dell'intervallo  $[0, 2/\pi]$  in cui  $f$  è derivabile e calcolare la derivata q.o.  $f'$  di tale funzione.
- La funzione  $f$  è a variazione limitata in  $[0, 2/\pi]$ ? è assolutamente continua?

**Esercizio 3.** Siano  $c_0$  lo spazio delle successioni reali  $x = (x_1, x_2, \dots)$  infinitesime, munito della norma

$$\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

ed  $\ell^2$  lo spazio delle successioni reali  $x = (x_1, x_2, \dots)$  tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \quad \text{converga.}$$

- Il sottoinsieme di  $c_0$  costituito dalle successioni che hanno tutte le componenti di indice pari nulle è un sottospazio di  $c_0$ ? È chiuso in  $c_0$ ?
- Dimostrare che  $\ell^2$  è un sottospazio di  $c_0$ .
- $\ell^2$  è un sottospazio chiuso di  $c_0$ ? Oppure  $\ell^2$  è denso in  $c_0$ ? oppure non è né chiuso né denso?

**Esercizio 4.** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert reale e si consideri il seguente operatore

$$A : H \rightarrow H, \quad A(x) = x \quad \text{se } \|x\| \leq 1, \quad A(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{se } \|x\| > 1.$$

- Provare che  $A$  è un operatore di proiezione su un convesso, chiuso, non vuoto  $K$  di  $H$  e determinare  $K$ .
- Mostrare che l'operatore  $A$  è lipschitziano da  $H$  in  $H$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 24 aprile 2019

**Esercizio 1.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione misurabile,  $\{u_n\}$  una successione di funzioni misurabili tale che  $u_n \geq 0$  q.o. in  $\Omega$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre, sappiamo che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} u_n(x) dx = 3.$$

Utilizzando queste informazioni,

- a) dimostrare che  $f \in L^1(\Omega)$  e che  $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 3$ ;
- b) posto  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  per  $x \in \Omega$ , discutere le convergenze  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(\Omega)$ , in misura e quasi uniforme.

**Esercizio 2.** Motivando per bene le risposte, dire se ciascuna delle seguenti  $N_i(f)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , è una norma in  $C^1([-1, 1])$  e, in caso affermativo, valutare se  $C^1([-1, 1])$  risulta uno spazio di Banach rispetto a tale norma:

- a)  $N_1(f) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f'(x)|$  ;
- b)  $N_2(f) = |f'(0)| + \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$  ;
- c)  $N_3(f) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f'(x)| + \int_{-1}^1 |f(x)| dx$  ;
- d)  $N_4(f) = \max_{-1 \leq x \leq 1} \left( |f(x)|^2 + |\tanh(f'(x))| \right)$  .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 11 luglio 2019

**Esercizio 1.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un aperto non vuoto e limitato. Poniamo, per  $s \in \mathbb{R}$  e  $\lambda > 0$ ,

$$f_\lambda(s) = \begin{cases} |s|^{\lambda-1}s & \text{se } s \neq 0, \\ 0 & \text{se } s = 0. \end{cases}$$

Fissata ora  $u \in L^1(\Omega)$ ,

- a) determinare per quali  $\lambda > 0$  la funzione  $x \mapsto f_\lambda(u(x))$  è integrabile in  $\Omega$ .
- b) È ragionevole chiedersi quanto fa  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} f_\lambda(u(x)) dx$ ? e  $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \int_{\Omega} f_\lambda(u(x)) dx$ ? Discutere i due limiti.

**Esercizio 2.** Indicato con  $\ell^2$  lo spazio di Hilbert delle successioni reali  $x = (x_n)$  tali che la serie  $\|x\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$  converga, sia  $X$  il sottoinsieme di  $\ell^2$  tale che i suoi elementi  $x = (x_n)$  verificano

$$x_k = 0 \quad \text{per ogni } k \text{ dispari.}$$

- a) L'insieme  $X$  è un sottospazio di  $\ell^2$ ? è chiuso in  $\ell^2$ ?
- b) La successione  $\left(\frac{1}{n}\right)$  sta in  $\ell^2$ ? appartiene a  $X$ ?
- c) Si chiede ora: esiste ed è unica la proiezione di  $\left(\frac{1}{n}\right)$  su  $X$ ? se la risposta è sì, determinare esplicitamente tale proiezione.

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 22 novembre 2019

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

per  $n \rightarrow \infty$  studiare le convergenze quasi ovunque, nei vari spazi  $L^p(\mathbb{R})$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ , e anche quasi uniforme e in misura.

**Esercizio 2.** Nello spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A e^{-|x|} \cos x d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e  $\mu$  è la misura unidimensionale di Lebesgue.

- Provare che  $\varphi$  è una misura relativa su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ .
- Per tale misura relativa  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .
- Calcolare  $\varphi([0, +\infty))$ .

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $\ell^2$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Inoltre, per ogni intero  $n \geq 1$  sia  $T_n$  l'operatore da  $\ell^2$  in sè che a  $x = (x_k)$  associa  $y = T_n x$  con

$$y_k = 2x_k \text{ per } k \leq n, \quad y_k = x_{k-1} \text{ per } k > n.$$

- Provare che per  $n$  fissato  $T_n$  è lineare e continuo.
- Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcolare  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2; \ell^2)}$ .
- Studiare iniettività e suriettività dell'operatore  $T_5$ .
- La successione di operatori  $\{T_n\}$  risulta convergente nello spazio  $\mathcal{L}(\ell^2; \ell^2)$ ?

**Esercizio 4.** Sia  $f(x)$  la funzione  $2\pi$ -periodica tale che  $f(x) = \cos x$  per  $0 \leq x < \pi$ ,  $f(x) = -\cos x$  per  $-\pi \leq x < 0$ .

- Sviluppare  $f$  in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

- discutere la convergenza puntuale, uniforme e in  $L^2(-\pi, \pi)$  della serie trovata.

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 17 gennaio 2018

**Esercizio 1.** Se  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione misurabile e non negativa, consideriamo la successione di funzioni  $f_n(x) = (u(x))^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e ci interessiamo al limite  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\mu$ , dove  $\mu$  denota la misura unidimensionale di Lebesgue. Sapendo che  $\int_{\mathbb{R}} u(x) d\mu = 2$ , trovare un esempio di funzione  $u$  misurabile e non negativa oppure dimostrare che non è possibile trovarla per ciascuno dei seguenti casi

a)  $L = 0$ ;   b)  $L = 2$ ;   c)  $L = -1$ ;   d)  $L = 1$ ;   e)  $L = 3$ ;   f)  $L = +\infty$ .

[Suggerimento: per  $u$  fissata può essere utile considerare gli insiemi  $\{x \in \mathbb{R} : u(x) < 1\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R} : u(x) = 1\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 1\}$ ]

**Esercizio 2.** Sia  $f : [0, 2/\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } 0 < x \leq 2/\pi, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- Calcolare la derivata q.o.  $f'$  di tale funzione;
- valutare l'integrabilità secondo Lebesgue di  $f'$  in  $[0, 2/\pi]$ ;
- discutere la validità della formula  $f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f' d\mu$  per  $0 \leq a < b \leq 2/\pi$ ;
- la funzione  $f$  è a variazione limitata? nel caso fornire una stima della sua variazione totale.

**Esercizio 3.** Si considerino lo spazio  $\ell^1$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  converga, e lo spazio  $\ell^\infty$  delle successioni reali limitate, muniti delle norme usuali. Sia  $T$  l'operatore definito per gli  $x = (x_k) \in \ell^\infty$  da

$$y = Tx \quad \text{se} \quad y_k = 2^{-k} x_k \quad \text{per } k \geq 1.$$

- Provare che  $Tx \in \ell^1$  per ogni  $x \in \ell^\infty$  e che l'operatore  $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^1$  è lineare e limitato.
- Calcolare esplicitamente la norma dell'operatore  $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^1$ .
- Studiare iniettività e suriettività di  $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^1$ .

**Esercizio 4.** Nello spazio di Hilbert reale  $H = L^2(-1, 1)$  si consideri il sottoinsieme  $K = \left\{ v \in H : \int_{(0,1)} |v(x)|^2 d\mu \leq 1 \right\}$

- Dimostrare che  $K$  è non vuoto, convesso e chiuso in  $H$ .
- Ricordare il teorema delle proiezioni e trovare esplicitamente la proiezione della funzione  $f(x) = 2x$ ,  $x \in (-1, 1)$ , su  $K$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 21 febbraio 2018

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n \left( \sqrt[n]{x} - 1 \right), \quad x \in [0, e], \quad n \in \mathbb{N},$$

- studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $[0, e]$ ;
- discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $[0, e]$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;
- indicata con  $f$  la funzione limite delle  $f_n$ , si chiede se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, e]} f_n d\mu$  esiste e vale  $\int_{[0, e]} f d\mu$ .
- (*facoltativo*) Studiare le convergenze  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p([0, e])$  per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** Siano  $\mathcal{B}$  la famiglia dei boreliani di  $\mathbb{R}$ ,  $\mu$  la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ,  $\{x_n\}$  e  $\{a_n\}$  due successioni di numeri reali con  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ . Per  $E \in \mathcal{B}$  definiamo

$$\nu(E) = \sum_{x_n \in E} a_n.$$

Provare che  $\nu$  è una misura relativa su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  e calcolare  $\frac{d\nu}{d\mu}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\Omega = [-1, 1]^2$ , cioè  $\Omega$  denota il quadrato di centro l'origine e lato 2 in  $\mathbb{R}^2$ . Consideriamo lo spazio di Hilbert reale  $H = L^2(\Omega)$  e il suo sottoinsieme

$$X = \{f \in L^2(\Omega) : |f(x, y)| \geq 1 \text{ per q.o. } (x, y) \in \Omega\}.$$

- $X$  è non vuoto?    b)  $X$  è un convesso di  $H$ ?    c)  $X$  è chiuso in  $H$ ?
- Sia ora  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $u(x, y) = xy$  se  $y \geq 0$ ,  $u(x, y) = 0$  se  $y < 0$ . È possibile definire la proiezione di  $u$  su  $X$  in  $L^2(\Omega)$ ?

**Esercizio 4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica tale che  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$  per  $0 \leq x < 2\pi$ .

- Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier.
- Detta  $S(x)$  la somma della serie, calcolare  $S(0)$ .
- Calcolare la somma della serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$ .
- Discutere la convergenza uniforme della serie di Fourier in  $\mathbb{R}$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 10 luglio 2018

**Esercizio 1.** Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \text{con } f_n(x) := \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)} \quad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

- discuterne la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della **serie** di funzioni in  $\mathbb{R}$  (NB: non confondere con la **successione**  $\{f_n\}$ );
- discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;
- indicata con  $s$  la somma della serie laddove è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue anche per questa funzione.

**Esercizio 2.** Posto  $E = \{f \in C^0([0, +\infty)) : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$ , si definisca

$$\|f\|_E = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x)|.$$

- Si provi che  $E$  è uno spazio vettoriale e che  $\|\cdot\|_E$  è effettivamente una norma.
- Rispetto alla norma  $\|\cdot\|_E$ ,  $E$  è uno spazio di Banach?
- Si consideri l'operatore lineare  $L : E \rightarrow L^1([0, +\infty))$  definito da  $(Lf)(x) = e^{-x}f(x)$ ,  $x \geq 0$ . Si provi che  $L$  è ben definito, lineare e continuo.

**Esercizio 3.** In  $\mathbb{R}^2$ , dati i due vettori  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  poniamo

$$((x, y)) = 4x_1y_1 + x_2y_2.$$

- Verificare che  $x, y \mapsto ((x, y))$  definisce un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ , rispetto al quale  $H = \mathbb{R}^2$  è uno spazio di Hilbert.
- Se  $V$  è il sottospazio  $V = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ , caratterizzare il sottospazio ortogonale  $V^\perp$  in  $H$ .
- Determinare la proiezione su  $V$  del vettore  $(-1, 1)$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2018

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \max \left\{ 0, \frac{n - |x - n|}{n^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

per  $n \rightarrow \infty$  studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi  $L^p(\mathbb{R})$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** In  $\mathbb{R}^2$ , dati i due vettori  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$  poniamo

$$((x, y)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

- a) Verificare che  $x, y \mapsto ((x, y))$  definisce un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ , rispetto al quale  $H = \mathbb{R}^2$  è uno spazio di Hilbert.
- b) Se  $V$  è il sottospazio  $V = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ , caratterizzare il sottospazio ortogonale  $V^\perp$  in  $H$ .
- c) Determinare la proiezione su  $V$  del vettore  $(1, 1)$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 27 novembre 2018

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

- a) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ ;
- b) discutere l'integrabilità delle funzioni  $f_n$  in  $\mathbb{R}$ , per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue su  $\mathbb{R}$ ;
- c) indicata con  $f$  la funzione limite delle  $f_n$ , si chiede se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \quad \text{esiste e vale} \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

**Esercizio 2.** Dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  sullo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi((-\infty, 0)) = 3, \quad \varphi([-1, 1]) = -2, \quad \varphi((0, +\infty)) = 5.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .

**Esercizio 3.** Si considerino lo spazio  $\ell^1$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  converga e lo spazio  $c_0$  delle successioni reali infinitesime, muniti delle norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_{\infty}$ , rispettivamente.

- a) Si provi che  $\ell^1$  è un sottospazio di  $c_0$ .
- b) Calcolare esplicitamente la norma dell'operatore di inclusione da  $\ell^1$  in  $c_0$ .
- c)  $\ell^1$  è un sottospazio chiuso di  $c_0$ ? Oppure  $\ell^1$  è denso in  $c_0$ ? oppure non è né chiuso né denso?

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio  $H = L^2(0, e)$ :

$$X = \{u \in H : u(x) \geq 0 \text{ per q.o. } x \in (0, e)\}$$

e la funzione  $f(x) = \ln x$ ,  $x \in (0, e)$ .

- a) Dire perché  $f \in H$  e perché  $X$  è un convesso non vuoto di  $H$ .
- b)  $X$  è chiuso in  $H$ ?
- c) Trovare la proiezione di  $f$  su  $X$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 17 gennaio 2017

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}, \quad x \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

- studiare la convergenza q.o., q.u. e in misura di  $\{f_n\}$  in  $(0, +\infty)$ .
- Provare che per qualunque  $n \in \mathbb{N}$  la funzione  $f_n$  è integrabile in  $(0, +\infty)$ .

c) Esiste finito il  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, +\infty)} f_n(x) dx$  ?

**Esercizio 2.** Nello spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 2^{-k} \delta_{k-3}(A), \quad A \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e, per  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_y$  indica la misura di Dirac concentrata in  $y$ .

- $\varphi$  è una misura relativa su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ ?
- Per tale misura  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .
- Calcolare  $\varphi(B)$ , dove  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$ .
- $\varphi$  è assolutamente continua oppure singolare rispetto alla misura  $\mu$  di Lebesgue?

**Esercizio 3.** Si consideri l'insieme

$$V = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} : \int_{\mathbb{R}} e^{|x|} |f(x)|^3 dx < +\infty \right\}.$$

- $V$  ha la struttura di spazio vettoriale?
- Provare che  $V$  è un sottoinsieme di  $L^3(\mathbb{R})$ .
- Provare che  $C_c^0(\mathbb{R})$  (spazio delle funzioni continue con supporto compatto in  $\mathbb{R}$ ) è un sottoinsieme di  $V$ .
- $V$  è chiuso in  $L^3(\mathbb{R})$ ?

**Esercizio 4.** Sia  $L^2(-1, 1)$  l'usuale spazio di Hilbert *complesso* con prodotto scalare  $(u, v) = \int_{(-1, 1)} u(x) \overline{v(x)} dx$  per  $u, v \in L^2(-1, 1)$ . Trovare una funzione  $g \in L^2(-1, 1)$  tale che

$$(f, g) = \int_{(0, 1)} \int_{(0, 1)} \frac{i}{1 + (y - x)^2} f\left(\frac{x}{2}\right) (y - x) dx dy, \quad \text{per ogni } f \in L^2(-1, 1).$$

La  $g \in L^2(-1, 1)$  così trovata è unica?

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 16 febbraio 2017

**Esercizio 1.** Posto, per  $x \in [1, +\infty)$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} \ln(1 + nx) - \ln(nx) & \text{se } 1 \leq x \leq n, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

- dimostrare che  $|f_n(x)| \leq 1/x$  per ogni  $x > 1$  e per ogni  $n \geq 1$ .
- Studiare la convergenza q.o. della successione  $\{f_n\}$  in  $[1, +\infty)$ .
- È possibile applicare alla successione  $\{f_n\}$  i teoremi di Beppo Levi della convergenza monotona o di Lebesgue della convergenza dominata per passare al limite sotto il segno di integrale?
- Calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, +\infty)} f_n(x) dx$ .

**Esercizio 2.** Si chiedono due esempi di funzione a variazione limitata  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

- il primo sia quello di una funzione non monotona in  $[0, 2]$  la cui variazione totale in  $[0, 2]$  è 10;
- il secondo fornisca una funzione assolutamente continua e non negativa che possiede una derivata q.o.  $f' \notin L^\infty([0, 2])$ .

**Esercizio 3.** Introdotto l'insieme  $V = \{f \in C^1([-1, 1]) : f(0) = 0\}$ ,

- controllare che  $V$  è uno spazio vettoriale.
- Dimostrare che  $\|f\|_0 = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ ,  $\|f\|_d = \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)|$  sono entrambe norme in  $V$ .
- Discutere l'equivalenza o meno delle due norme in  $V$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $2\pi$ -periodica tale che  $f(x) = \pi - x$  per  $-\pi \leq x < \pi$ .

- Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier della forma  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  rispetto al prodotto scalare  $(f, g) := \pi^{-1} \int_{(-\pi, \pi)} f(x)g(x)dx$ ,  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ .
- Detta  $S(x)$  la somma della serie, calcolare  $S(-\pi)$ .
- Calcolare la somma della serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 14 giugno 2017

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi  $L^p(\mathbb{R})$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** Per  $1 \leq p < \infty$  si consideri lo spazio di Banach  $\ell^p$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$  converga, munito della norma usuale (da richiamare).

Inoltre, sia  $T$  l'operatore definito per gli  $x \in \ell^2$  da

$$y = Tx \quad \text{se} \quad y_k = \frac{x_k}{k} \quad \text{per} \quad k \geq 1.$$

- a) Provare che l'operatore  $T$  è lineare.
- b) Determinare tutti e soli i valori di  $p \in [1, \infty)$  tali che  $T$  risulti lineare e continuo da  $\ell^2$  in  $\ell^p$ .
- c) Per  $p = 1$  calcolare esplicitamente la norma dell'operatore  $T$  da  $\ell^2$  in  $\ell^1$ .
- d) Studiare iniettività e suriettività di  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^p$  per tutti i  $p$  di cui al punto b).

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 3 luglio 2017

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt[4]{x+1}(1+x)^n}, \quad x \in (0, +\infty),$$

- studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura.
- Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato trovare tutti i valori  $p$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , tali che  $f_n \in L^p(0, +\infty)$ .
- Per i valori  $p$  di cui al punto b) studiare la convergenza della successione  $\{f_n\}$  in  $L^p(0, +\infty)$ .

**Esercizio 2.** Per  $1 \leq q < \infty$  si consideri lo spazio di Banach  $\ell^q$  delle successioni reali

$x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q$  converga, munito della norma usuale (da richiamare).

Inoltre, sia  $T$  l'operatore definito per gli  $x \in \ell^2$  da

$$y = Tx \quad \text{se} \quad y_k = \frac{x_k}{k} \quad \text{per} \quad k \geq 1.$$

- Provare che l'operatore  $T$  è lineare.
- Dimostrare che  $T$  è continuo da  $\ell^2$  in  $\ell^1$ .
- Calcolare esplicitamente la norma dell'operatore  $T$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 31 luglio 2017

**Esercizio 1.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{3x^{2n}}{(1+2x^2)^{n+1}}, \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi  $L^p(\mathbb{R})$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 2.** Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{tale che} \quad T(3, -2) = (-1, 3, 5, -2).$$

Una volta fornito l'esempio e dunque scritto l'operatore  $T$ , determinare una costante  $C > 0$  tale che

$$\sum_{i=1}^4 |y_i| \leq C \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\text{dove } (y_1, y_2, y_3, y_4) = T(x_1, x_2).$$

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 24 novembre 2017

**Esercizio 1.** Si consideri il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \min \left\{ 1, \frac{2}{1+x^2} \right\} \right\}.$$

Sia inoltre  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili che converge q.o. in  $E$  ad una funzione  $u$ .

- Provare che  $E$  è misurabile secondo Lebesgue e calcolarne la misura.
- Si chiede se  $\tanh u_n \rightarrow \tanh u$  q.o. in  $E$ .
- Dire, motivando la risposta, se  $\tanh u_n \rightarrow \tanh u$  in  $L^1(E)$ .
- Dire, motivando la risposta, se  $\tanh u_n \rightarrow \tanh u$  in  $L^\infty(E)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $\ell^2$  lo spazio di Hilbert reale delle successioni  $x = (x_1, x_2, \dots)$  tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Per  $\lambda$  fissato in  $\mathbb{R}$ , si consideri l'applicazione  $T_\lambda : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$T_\lambda(x) = \sum_{n=5}^{\infty} \lambda^n x_n.$$

- Valutare, in dipendenza del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se  $T_\lambda$  è ben definito e rappresenta un elemento di  $(\ell^2)'$ , giustificando per bene le risposte date.
- Per i valori  $\lambda$  per i quali  $T_\lambda \in (\ell^2)'$ , calcolare  $\|T_\lambda\|_{(\ell^2)'}$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 18 gennaio 2016

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e integrabile secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}$ . Consideriamo le successioni di funzioni  $\{u_n\}$  e  $\{v_n\}$  definite da  $u_n(x) = f(x/n)$  e  $v_n(x) = f(nx)$  per  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

- Le successioni  $\{u_n\}$  e  $\{v_n\}$  convergono q.o. in  $\mathbb{R}$ ?
- Esistono i seguenti limiti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x) dx$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} v_n(x) dx$  e nel caso quanto valgono?

Giustificare per bene le risposte date.

**Esercizio 2.** Dare un esempio di funzione  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

- che sia a variazione limitata;
- che non sia né continua né monotona in  $[-1, 1]$ ;
- la cui variazione totale nell'intervallo  $[-1, 1]$  valga 5.

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio vettoriale  $E = \{u \in C^0([-1, 1]) : u(0) = 0\}$  munito della norma

$$\|u\|_{\infty} = \max_{-1 \leq t \leq 1} |u(t)|, \quad u \in E.$$

- Dire perché lo spazio  $E$  è uno spazio di Banach.
- Verificare che

$$\|u\|_a := \max_{-1 \leq t \leq 1} \frac{|u(t)|}{1+t^2}, \quad \|u\|_b := \max_{-1 \leq t \leq 1} t^2 |u(t)|, \quad u \in E,$$

definiscono altre due norme in  $E$ .

- Provare che  $\|\cdot\|_a$  è equivalente a  $\|\cdot\|_{\infty}$  e che invece  $\|\cdot\|_b$  non è equivalente a  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio  $H = L^2(-1, 1)$  (munito di prodotto scalare e norma usuali)

$$X = \{u \in H : u(x) = ax + bx^2, \quad x \in (-1, 1), \text{ per una coppia } (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \frac{11}{12} x^{-1/4} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

- Dire perché  $f \in H$  e perché  $X$  è un sottospazio di  $H$ .
- $X$  è chiuso in  $H$ ?
- A partire dalle funzioni  $w(x) = x$ ,  $z(x) = x^2$ ,  $x \in (-1, 1)$ , costruire un sistema ortonormale che fornisca una base in  $X$ .
- Trovare la proiezione di  $f$  su  $X$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 16 febbraio 2016

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile su  $\mathbb{R}$  rispetto alla misura unidimensionale  $\mu$  di Lebesgue. Posto  $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n-1 \leq |f(x)| < n\}$  per  $n \in \mathbb{N}$ ,

- controllare la misurabilità degli insiemi  $A_n$  e provare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ ;
- discutere la convergenza o meno delle serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$ ;
- trovare un esempio di funzione  $f$  integrabile su  $\mathbb{R}$  tale che la relativa successione  $\{\mu(A_n)\}$  non sia monotona.

**Esercizio 2.** Siano  $f_n : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{y-x}} & \text{se } x \neq y \end{cases}, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della successione  $\{f_n\}$ .
- Posto  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  e osservato che le funzioni  $f_n$  sono integrabili secondo Lebesgue (non si richiede dimostrazione), calcolare i due limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Q f_n(x, y) dx dy, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Q |f_n(x, y)| dx dy,$$

**Esercizio 3.** Sia  $\ell^1$  lo spazio di Banach delle successioni reali  $x = (x_1, x_2, \dots)$  tali che

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Dare un esempio di due sottospazi  $X, Y \subset \ell^1$ , diversi da  $\ell^1$  e dal sottospazio costituito dal solo vettore nullo, tali che  $X$  sia un chiuso di  $\ell^1$  mentre  $Y$  sia denso in  $\ell^1$ , controllando esplicitamente chiusura per  $X$  e densità per  $Y$ .

**Esercizio 4.** Sia  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $u(x) = x|x|$  per  $x \in (-\pi, \pi]$ .

- Sviluppare  $u$  in serie di Fourier della forma  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ ;
- discutere la convergenza in  $L^2(\mathbb{T})$  della serie trovata.

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 13 giugno 2016

**Esercizio 1.** Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad x \geq 0,$$

- dire se la serie converge quasi ovunque in  $[0, +\infty)$ ;
- studiare la convergenza quasi uniforme e in misura della serie in  $[0, +\infty)$ ;
- detta  $f(x)$  la somma della serie, valutare la misurabilità e l'integrabilità della funzione  $f$  in  $[0, +\infty)$ ;
- è possibile scambiare l'operazione di serie con quella di  $\int_{[0, +\infty)}$  ?

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio di funzioni

$$V = \left\{ u \in C^0([-1, 1]) : \int_{[-1, 1]} u(x) dx = 0 \right\}$$

e si definisca

$$\|u\| = \int_{[-1, 1]} u^+(x) dx, \quad u \in V, \quad (\diamond)$$

dove  $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , denota la parte positiva di  $u$ .

- Dire perché  $V$  è uno spazio vettoriale.
- Verificare che  $\|\cdot\|$  è effettivamente una norma in  $V$ .
- Dare un esempio di funzione  $u \in V$  tale che  $\|u\| = 5$ .
- Discutere l'equivalenza della norma definita in  $(\diamond)$  con la norma

$$\|u\|_1 = \int_{[-1, 1]} |u(x)| dx, \quad u \in V.$$

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 30 agosto 2016

**Esercizio 1.** Si consideri lo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue  $\lambda$ . Consideriamo le funzioni di insieme

$$\mu(A) = \lambda(\{x \in A : 0 < x \leq 1\}), \quad \nu(A) = \lambda(\{x \in A : |x| \geq 1\}) \quad \text{per } A \in \mathcal{L}.$$

- a) Provare che  $\mu, \nu$  sono misure su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ . Sono  $\sigma$ -finite?
- b) Valutare se  $\mu, \nu$  sono assolutamente continue o singolari (oppure né assolutamente continue né singolari) rispetto alla misura  $\lambda$ .
- c)  $\lambda$  è assolutamente continua o singolare rispetto a  $\mu$ ?
- d)  $\mu$  è assolutamente continua o singolare rispetto a  $\nu$ ?

**Esercizio 2.** Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5 \quad \text{tale che} \quad T(3, -2) = (1, 2, -6, 0, -3).$$

Una volta fornito l'esempio e dunque scritto l'operatore  $T$ , determinare una costante  $C > 0$  tale che

$$\sum_{i=1}^5 |y_i| \leq C \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = T(x_1, x_2).$$

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 27 settembre 2016

**Esercizio 1.** Posto, per  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

- a) Perché le funzioni  $f_n$  sono (misurabili e) integrabili in  $\mathbb{R}$ ?
- b) Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme, in misura della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- c) È possibile applicare alla serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se sì, quali? Se no, perché?

**Esercizio 2.** Si consideri il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 0\}.$$

- a) L'insieme  $X$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ ?
- b) Provare che  $X$  è chiuso in  $\mathbb{R}^3$ .
- c) Esiste la proiezione del vettore  $(-1, 1, -1)$  su  $X$ ? Nel caso calcolare esplicitamente tale proiezione.
- d) Individuare l'insieme ortogonale  $X^\perp$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 febbraio 2015

**Esercizio 1.** Per  $n \in \mathbb{N}$  si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Trovare un intero  $k \in \mathbb{N}$  tale che per  $n \geq k$  la funzione  $f_n$  sia integrabile in  $\mathbb{R}$ .
- Calcolare, motivando opportunamente le risposte, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx.$$

**Esercizio 2.** Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione così definita:  $f(0) = 0$ ; per  $n = 1, 2, \dots$  la restrizione di  $f$  all'intervallo  $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$  ha come grafico il segmento di estremi

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{(-1)^n}{n+1}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

- Tale funzione  $f$  è a variazione limitata in  $[0, 1]$ ?
- Se  $\{z_n\}$  è una successione di funzioni continue e a variazione limitata in  $[0, 1]$  che converge uniformemente a una funzione  $z$  in  $[0, 1]$ , è possibile concludere che  $z$  è a variazione limitata in  $[0, 1]$ ?

**Esercizio 3.** Si considerino l'intervallo  $(0, 1)$  della retta reale (munito dell'ordinaria misura di Lebesgue) e gli spazi  $L^p(0, 1)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ .

Dire, motivando per bene le risposte, se esistono (oppure non possono esistere) delle successioni  $\{g_n\}$ ,  $\{h_n\}$ ,  $\{u_n\}$ ,  $\{v_n\}$  tali che  $g_n, h_n, u_n, v_n \in L^\infty(0, 1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e inoltre, per  $n \rightarrow \infty$ ,

- $g_n \rightarrow 0$  in  $L^1(0, 1)$  ma  $\|g_n\|_{L^\infty(0,1)} \rightarrow +\infty$ ;
- $h_n \rightarrow 0$  in  $L^\infty(0, 1)$  ma  $\|h_n\|_{L^1(0,1)} \rightarrow +\infty$ ;
- $u_n \rightarrow 0$  in  $L^1(0, 1)$  ma  $\|u_n\|_{L^2(0,1)} \rightarrow +\infty$ ;
- $v_n \rightarrow 0$  in  $L^2(0, 1)$  ma  $\|v_n\|_{L^1(0,1)} \rightarrow +\infty$ .

**Esercizio 4.** Si consideri l'insieme

$$X = \{f \in L^2(0, +\infty) : f(x) = 1/x \text{ per q.o. } x \in (2, +\infty)\}.$$

- Provare che  $X$  è un convesso contenuto in  $L^2(0, +\infty)$ .
- Dire se  $X$  è un sottospazio di  $L^2(0, +\infty)$ .
- Dire se  $X$  è chiuso in  $L^2(0, +\infty)$ .
- Posto  $g(x) = e^{-x}$  per  $x > 0$ , calcolare la proiezione di  $g$  su  $\overline{X}$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 15 giugno 2015

**Esercizio 1.** Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili secondo Lebesgue e tali che  $-2 \leq f_n(x) \leq 1$  q.o. in  $\Omega$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre, la successione  $\{f_n\}$  converge a una funzione  $f$  in misura.

- Dimostrare che, per ogni  $1 \leq p < \infty$ , si ha  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(\Omega)$ .
- Se  $\Omega$  è ora la palla aperta di centro l'origine e raggio 1, costruire un esempio di successione  $\{f_n\}$  nelle condizioni dell'enunciato e tale che  $f_n \not\rightarrow f$  in  $L^\infty(\Omega)$ .

**Esercizio 2.** Nello spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A \frac{\sin x}{1+x^2} d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e  $\mu$  è la misura unidimensionale di Lebesgue.

- Provare che  $\varphi$  è una misura relativa su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ .
- Per tale misura relativa  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .
- Calcolare  $\varphi(B)$ , dove  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \pi/2\}$ .

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $\ell^2$  delle successioni reali  $x = (x_k)$  tali che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Inoltre, per ogni intero  $n \geq 1$  sia  $T_n$  l'operatore da  $\ell^2$  in sè che a  $x = (x_k)$  associa  $y = T_n x$  con

$$y_k = x_k \text{ per } k < n, \quad y_k = x_{k+1} \text{ per } k \geq n.$$

- Provare che per  $n$  fissato  $T_n$  è lineare e continuo.
- Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  calcolare  $\|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2; \ell^2)}$ .
- Studiare iniettività e suriettività dell'operatore  $T_3$ .
- La successione di operatori  $\{T_n\}$  risulta convergente nello spazio  $\mathcal{L}(\ell^2; \ell^2)$ ?

**Esercizio 4.** Si consideri la funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  definita da

$$f(x) = \cos(2x + 1) - \sin(4 - 3x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

- Sviluppare  $f$  in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

- discutere la convergenza puntuale, uniforme e in  $L^2(\mathbb{T})$  della serie trovata.

# ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino 6 luglio 2015

**Esercizio 1.** Posto, per  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{se } n < x < n+1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si risponda alle seguenti domande.

- a) Perché le funzioni  $f_n$  sono (misurabili e) integrabili in  $\mathbb{R}$ ?
- b) Studiare la convergenza q.o. della successione  $\{f_n\}$  in  $\mathbb{R}$ .
- c) È possibile applicare alla successione  $\{f_n\}$  i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale? Se sì, quali? Se no, perché?

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio  $H = L^2(-1, 1)$

$$X = \{u \in H : u(x) = a + bx^2, x \in (-1, 1), \text{ per una coppia } (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

- a) Dire perché  $f \in H$  e perché  $X$  è un sottospazio di  $H$ .
- b)  $X$  è chiuso in  $H$ ?
- c) Trovare la proiezione di  $f$  su  $X$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Scrittino del 3 settembre 2015

**Esercizio 1.** Nello spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$  si consideri la funzione di insieme

$$\varphi(A) = \int_A \frac{x}{1+x^4} d\mu, \quad A \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e  $\mu$  è la misura unidimensionale di Lebesgue.

- a)  $\varphi$  è una misura relativa su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ ?
- b) Per tale misura relativa  $\varphi$  individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .
- c) Calcolare  $\varphi(B)$ , dove  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ .

**Esercizio 2.** Siano  $X$  lo spazio  $\mathbb{R}^2$  munito della norma  $\|\cdot\|_\infty$  e  $Y$  lo spazio  $\mathbb{R}^5$  munito della norma  $\|\cdot\|_1$ . Dare un esempio di operatore lineare e continuo

$$T : X \rightarrow Y \quad \text{tale che} \quad T(1, 1) = (1, 0, -2, 0, 1).$$

Una volta scritto l'operatore, controllare esplicitamente che tale operatore è limitato da  $X$  in  $Y$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 4 dicembre 2015

**Esercizio 1.** Si consideri la successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + (nx)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

per  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Studiare misurabilità e integrabilità in  $\mathbb{R}$  di queste funzioni.
- b) La successione  $f_n$  converge q.o. in  $\mathbb{R}$ ?
- c) Esaminare anche la convergenza quasi uniforme, in misura e in  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 2.** Dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  sullo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi([-1, 1]) = -1, \quad \varphi((-\infty, 0]) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi((0, +\infty)) = 1.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .

**Esercizio 3.** Nello spazio  $c_0$  delle successioni  $a = (a_1, a_2, \dots)$  reali e infinitesime poniamo

$$\|a\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \quad |||a||| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |a_n|, \quad \text{per } a \in c_0.$$

- a) Dimostrare che  $\|\cdot\|$  e  $|||\cdot|||$  definiscono effettivamente due norme in  $c_0$ .
- b) Discutere l'equivalenza delle due norme, soffermandosi sulla validità o meno delle due proprietà

$$\text{esiste una costante } C > 0 \text{ tale che } |||a||| \leq C \|a\| \text{ per ogni } a \in c_0; \quad (1)$$

$$\text{esiste una costante } D > 0 \text{ tale che } \|a\| \leq D |||a||| \text{ per ogni } a \in c_0. \quad (2)$$

**Esercizio 4.** Si consideri il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}.$$

- a) Mostrare che  $X$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ . È chiuso?
- b) Individuare ed esplicitare il sottospazio  $Y = X^\perp$ .
- c) Calcolare la proiezione del vettore  $(1, 1, 1)$  su  $X$ .
- d) Calcolare la proiezione del vettore  $(1, 1, 1)$  su  $Y$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 gennaio 2014

**Esercizio 1.** Sia  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione assegnata.

a) Provare che se  $f$  è continua in  $[-1, 1]$ , il suo grafico

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = f(x)\}$$

ha misura bidimensionale di Lebesgue nulla.

b) Se  $f$  è continua nei punti dell'intervallo aperto  $(-1, 1)$ , possiamo ancora concludere che  $G(f)$  è misurabile secondo Lebesgue e ha misura nulla?

**Esercizio 2.** Sia  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  non crescente e non negativa. Ci interessiamo alla successione di funzioni  $f_n(x) = g(x^n)$ ,  $x > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , e al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, +\infty)} f_n(x) dx, \quad (\text{L})$$

dove naturalmente l'integrale qui sopra può anche essere uguale a  $+\infty$  per qualche indice  $n$ .

a) Dire se esistono (finiti o infiniti) i limiti  $L_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ ,  $L_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$  e quanto possono valere (fare esempi di funzioni  $g$ ).

b) Provare che se  $L_\infty > 0$ , allora il limite in (L) vale  $+\infty$ .

c) Provare che se  $L_\infty = 0$  ma  $L_0 = +\infty$  allora il limite in (L) vale ancora  $+\infty$ .

d) Nel caso in cui  $L_\infty = 0$  e  $L_0$  è finito e diverso da 0, discutere separatamente il comportamento dei due integrali  $\int_{(0,1)} f_n(x) dx$ ,  $\int_{(1,+\infty)} f_n(x) dx$  al tendere di  $n$  a  $\infty$  e conseguentemente trovare il valore del limite in (L).

**Esercizio 3.** Dare un esempio di operatore lineare e continuo da  $L^2(\mathbb{R})$  in  $\ell^1$  che non sia iniettivo e che abbia norma esattamente uguale ad 1.

**Esercizio 4.** Nello spazio di Hilbert  $X = L^2(\mathbb{T})$  si consideri il sistema ortonormale completo  $S = \{\sqrt{2}/2, \cos(kx), \sin(kx); k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$  rispetto al seguente prodotto scalare  $(f, g)_X := \pi^{-1} \int_{(-\pi, \pi)} f(x)g(x)dx$ ,  $f, g \in X$ . Sia  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  e tale che

$$u(x) = 1 \text{ se } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [0, \pi/2], \quad u(x) = -1 \text{ se } x \in (-\pi/2, 0) \cup (\pi/2, \pi).$$

a) Osservato che  $u \in X$ , sviluppare la funzione  $u$  in serie di Fourier rispetto al sistema  $S$ .

b) Utilizzare il risultato trovato per calcolare la somma della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 febbraio 2014

**Esercizio 1.** Posto  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$  e  $f_n(x) = g(nx)\chi_{[-n,n]}(x)$  per  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  (ove, al solito,  $\chi_A$  indica la funzione caratteristica dell'insieme  $A \subset \mathbb{R}$ ), per la successione  $\{f_n\}$  si studino le convergenze

- quasi ovunque, quasi uniforme e in misura su tutto  $\mathbb{R}$ ;
- in  $L^1(\mathbb{R})$  e in  $L^p(\mathbb{R})$  con  $1 < p < \infty$ .

**Esercizio 2.** Posto  $f(x) = \text{segno}(\sin(2x))$  per  $x \in [-\pi, \pi]$ , dove  $\text{segno}(t)$  è la funzione che vale 1 per  $t > 0$ ,  $-1$  per  $t < 0$ , 0 per  $t = 0$ ,

- calcolare la variazione totale di  $f$  in  $[-\pi, \pi]$ .
- Esprimere  $f$  come differenza di due funzioni monotone non decrescenti.
- Calcolare la derivata quasi ovunque di  $f$  e dire se per  $f$  vale il teorema fondamentale del calcolo in  $[-\pi, \pi]$ .
- Sviluppare  $f$  in serie di Fourier rispetto al sistema ortonormale completo  $S = \{\sqrt{2}/2, \cos(kx), \sin(kx); k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$  quando si consideri il prodotto scalare

$$(f, g) := \pi^{-1} \int_{(-\pi, \pi)} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in X.$$

**Esercizio 3.** Dare un esempio di operatore lineare e continuo da  $\mathbb{R}^3$  in  $L^\infty(-1, 1)$  che sia iniettivo e che abbia norma esattamente uguale ad 3.

**Esercizio 4.** Posto  $H = L^2(\mathbb{R})$ , sia  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  il funzionale definito da

$$F(u) = \int_{(1,2)} u(x)dx - \int_{(0,1)} u(x)dx, \quad u \in H,$$

gli integrali essendo intesi nel senso di Lebesgue.

- $F$  è lineare e continuo? In caso affermativo, si calcoli  $\|F\|_{H'}$ .
- Determinare tutti e soli gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui l'insieme  $E_\alpha = \{u \in H : F(u) = \alpha\}$  è chiuso, è convesso, è un sottospazio.
- Sia ora  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $E_\alpha$  è sottospazio chiuso di  $H$ . Controllato che la funzione  $w(x) := e^{-|x-1|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , individua un elemento di  $H$ , determinare la proiezione di  $w$  su  $E_\alpha$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 23 settembre 2014

**Esercizio 1.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$ ,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione,  $\{u_n\}$  una successione di funzioni misurabili tale che  $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$  q.o. in  $\Omega$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Sappiamo che

$$u_n \rightarrow u \text{ q.o. in } \Omega, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^2 dx = 100.$$

Utilizzando queste informazioni, dimostrare che

- $u \in L^2(\Omega)$ ;
- $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 10$ ;
- $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $(\Omega, \mathcal{L}, \lambda)$  lo spazio di misura caratterizzato dalla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{L}$  dei sottoinsiemi di  $\Omega$  misurabili secondo Lebesgue e dalla misura  $\lambda$  di Lebesgue.

- Provare che l'insieme  $X$  delle misure relative definite su  $(\Omega, \mathcal{L})$  è un spazio vettoriale.
- Dare almeno un esempio di sottospazio proprio di  $X$  di dimensione infinita.
- Provare che data una misura relativa  $\varphi$  su  $(\Omega, \mathcal{L})$  esistono sempre due misure relative  $\mu$  e  $\nu$  tali che  $\mu$  è  $\lambda$ -assolutamente continua,  $\nu$  è  $\lambda$ -singolare e inoltre  $\varphi = \mu + \nu$ .
- Le misure relative  $\mu$   $\lambda$ -assolutamente continua e  $\nu$   $\lambda$ -singolare tali che  $\varphi = \mu + \nu$  sono univocamente determinate? oppure può esistere una decomposizione diversa di  $\varphi$ ?

**Esercizio 3.** Posto  $E = \{f \in C^1([0, 1]) : f(0) = 0\}$ , si definisca  $\|f\|_E = \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$ .

- Si provi che  $E$  è uno spazio vettoriale e che  $\|\cdot\|_E$  è effettivamente una norma.
- Rispetto alla norma  $\|\cdot\|_E$ ,  $E$  è uno spazio di Banach?
- Si consideri l'operatore lineare  $L : E \rightarrow C^0([0, 1])$  definito da  $(Lf)(x) = e^x f'(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ . Si provi che  $L$  è continuo.
- Dimostrare che  $L$  è sia iniettivo che suriettivo e fornire una rappresentazione esplicita dell'operatore inverso.

**Esercizio 4.** Sviluppare in serie di Fourier la funzione  $2\pi$ -periodica  $f$  definita da

$$f(x) = \cos(4x) \cos x + 3 - \sin(2x) - \sin x \sin(4x), \quad x \in [0, 2\pi],$$

rispetto al sistema ortonormale completo

$$\{(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2} \sin(nx), \pi^{-1/2} \cos(nx)\}.$$

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 12 dicembre 2014

**Esercizio 1.** Studiare l'integrabilità (secondo Lebesgue) della funzione

$$f_\alpha(x) = |\ln x|^\alpha, \quad x \in (0, 1),$$

sull'intervallo  $(0, 1)$  per tutti i valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Dare un esempio di misura relativa  $\varphi$  sullo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la  $\sigma$ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, tale che

$$\varphi([1, 2]) = 3 \quad \text{e} \quad \varphi((0, +\infty)) = -2.$$

Inoltre, per tale misura relativa individuare e scrivere esplicitamente le misure variazione superiore  $\varphi^+$ , variazione inferiore  $\varphi^-$  e variazione totale  $|\varphi|$ .

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio  $\mathbb{R}$  munito dell'ordinaria misura di Lebesgue. Ogni funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$  genera un operatore  $M_f : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$  definito da  $M_f(g)(x) := f(x)g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Verificare linearità e continuità di  $M_f$ .
- Provare che  $\|M_f\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}); L^1(\mathbb{R}))} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$  per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .
- Se fissiamo invece  $f \in L^4(\mathbb{R})$ , lo stesso operatore  $M_f$  è ancora ben definito da  $L^2(\mathbb{R})$  in  $L^1(\mathbb{R})$ ?

**Esercizio 4.** Sia  $f(x)$  la funzione  $2\pi$ -periodica tale che  $f(x) = x$  per  $-\pi < x \leq \pi$ .

- Sviluppare  $f(x)$  in serie di Fourier della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

rispetto al prodotto scalare  $(f, g) := \pi^{-1} \int_{(-\pi, \pi)} f(x)g(x)dx$ ,  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ .

- Detta  $S(x)$  la somma della serie, calcolare  $S(\pi)$ .
- Calcolare la somma della serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 gennaio 2013

**Esercizio 1.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un insieme misurabile secondo Lebesgue e di misura finita. Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili e tali che

1)  $\int_{\Omega} |f_n(x)|^2 dx < 8$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;

2)  $f_n$  converge a  $f$  q.o. in  $\Omega$ .

La funzione limite  $f$  è misurabile? è integrabile in  $\Omega$ ?

**Esercizio 2.** La funzione  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 2/\pi \\ x \sin(1/x) & \text{se } 2/\pi < x \leq 4/\pi \\ \cos x & \text{se } 4/\pi < x \leq \pi \end{cases}$$

è a variazione limitata? è assolutamente continua?

**Esercizio 3.** Introdotta l'insieme

$$Y = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f, f' \text{ sono limitate in } \mathbb{R} \text{ e } f(0) = 0\},$$

controllare che  $Y$  è uno spazio vettoriale e dimostrare che

$$\|f\|_c = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|, \quad \|f\|_d = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$$

sono entrambe norme in  $Y$  ma non sono equivalenti.

**Esercizio 4.** Posto, l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue,

$$a(u, v) = \int_{(0,1)} t^{-1/2} u(t) v(t) dt \tag{*}$$

per tutte le funzioni  $u, v : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili e tali che la funzione  $t \mapsto t^{-1/2} u(t) v(t)$  sia integrabile in  $(0, 1)$ ,

- (i) provare che  $a(\cdot, \cdot)$  verifica tutte le proprietà di un prodotto scalare;
- (ii)  $a(\cdot, \cdot)$  definisce effettivamente un prodotto scalare in  $L^2(0, 1)$ ?
- (iii) Siete in grado di individuare classi di funzioni  $X$  tali che per  $u, v \in X$  l'integrale in  $(*)$  ha senso?

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 febbraio 2013

**Esercizio 1.** Si consideri lo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue  $\mu$ . Introdotta la funzione di insieme

$$\nu(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n \in A \cap \mathbb{Z} \cap [-k, k]} 2^{-|n|}, \quad \text{per } A \in \mathcal{L},$$

provare che  $\nu$  è una misura su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ . Inoltre,  $\nu$  è  $\sigma$ -finita? è assolutamente continua o singolare (oppure né assolutamente continua né singolare) rispetto alla misura  $\mu$ ?

**Esercizio 2.** Per  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in (0, +\infty)$  si consideri la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{-2/\pi} & \text{se } 0 < x \leq (n+3)^{-1} \\ \pi^{-(n+2)x} & \text{se } x > (n+3)^{-1} \end{cases}$$

Discutere la convergenza di  $\{f_n\}$  in  $(0, +\infty)$  quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in  $L^1(0, +\infty)$ .

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio  $c_0$  delle successioni  $u = (u_1, u_2, \dots)$  reali e infinitesime, munito della norma  $\|u\|_{c_0} := \sup\{|u_k|, k \in \mathbb{N}\}$ . Sia  $a = (a_1, a_2, \dots)$  una successione reale tale che

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  converge e ha per somma 1.

- a) Provare che il funzionale  $F : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(u) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ , è ben definito, lineare e limitato.
- b) Calcolare esplicitamente la norma  $\|F\|_{(c_0)'}$ .

**Esercizio 4.** Si consideri lo spazio  $L^2(-1, 1)$  delle (classi di) funzioni  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  misurabili e di quadrato sommabile in  $(-1, 1)$ . Sia inoltre  $C \subset L^2(-1, 1)$  il sottoinsieme delle funzioni  $f$  tali che

$$\|f - 1\|_{L^2(-1,1)} \leq 3, \quad f \geq 0 \text{ q.o. in } (-1, 1), \quad \int_{(-1,1)} xf(x)dx = 0.$$

- (i) Provare che  $C$  è non vuoto, convesso e chiuso in  $L^2(-1, 1)$ .
- (ii) Ricorrendo alla proprietà di distanza minima, trovare la proiezione su  $C$  della funzione  $g(x) = -1 - x$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

# ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 1 luglio 2013

**Esercizio 1.** Perché l'insieme

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x 3^{-x^2}| \text{ se } 2k \leq x \leq 2k+1, \\ 0 < y < 2x 3^{-x^2} \text{ se } 2k+1 \leq x \leq 2k+2 \end{array} \right\}$$

è misurabile rispetto alla misura bidimensionale  $\mu$  di Lebesgue e di misura finita in  $\mathbb{R}^2$ ?  
Calcolare  $\mu(A)$ .

**Esercizio 2.** Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx}, \quad x \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N},$$

- discutere la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di  $\{f_n\}$  in  $(0, 1)$ ;
- le funzioni  $f_n$  sono integrabili in  $(0, 1)$ ?
- esiste finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} f_n(x) dx ?$$

**Esercizio 3.** Per  $f \in L^1(\mathbb{R})$  si consideri la funzione misurabile

$$g(x) = \int_{(x, +\infty)} f(t) \arctan t dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Provare che  $g$  è ben definita e che  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ .
- Sia ora  $T : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  l'operatore definito da  $Tf = g$ : si chiede se  $T$  è lineare oppure no.
- L'operatore  $T$  è continuo? Motivare per bene la risposta.

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio  $H = L^2(-2, 2)$

$$X = \{u \in H : u(x) = a + bx^2, \quad x \in (-2, 2), \text{ per una coppia } (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

e la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{if } -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ x-1 & \text{if } 0 < x \leq 2 \end{cases}.$$

- Dire perché  $f \in H$  e perché  $X$  è un sottospazio di  $H$ .
- $X$  è chiuso in  $H$ ?
- Trovare la proiezione di  $f$  su  $X$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 24 settembre 2013

**Esercizio 1.** Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme dei numeri interi positivi e sia  $\# : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  la funzione di insieme definita da

$$\#(E) = \text{cardinalità di } E, \quad E \subseteq \mathbb{N},$$

intendendo naturalmente che  $\#(E) = +\infty$  se  $E$  è infinito.

- Verificare che  $\#$  è una misura  $\sigma$ -finita su  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .
- Considerato lo spazio di misura  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ , si precisino le condizioni perché una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  sia misurabile. E quando invece  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile?

**Esercizio 2.** Sia  $f \in L^1(0, +\infty) \cap C^1([0, +\infty))$ . Calcolare, giustificando la risposta, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\ln(n+1)}^{\sqrt{n+5}} f(x) dx.$$

**Esercizio 3.** Introdotto lo spazio  $X = C^0([-1, 1])$  e posto

$$\|f\| := \max\{|f(-1)|, |f(1)|\} + \int_{-1}^1 |f(x)| dx, \quad \| \|f\| \| := \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|, \quad \text{per } f \in X,$$

- dimostrare che  $\| \cdot \|$  e  $\| \| \cdot \| \|$  definiscono effettivamente due norme in  $X$ ;
- discutere l'equivalenza delle due norme, soffermandosi sulla validità o meno delle due proprietà

$$\text{esiste una costante } C > 0 \text{ tale che } \|f\| \leq C \| \|f\| \| \text{ per ogni } f \in X; \quad (3)$$

$$\text{esiste una costante } D > 0 \text{ tale che } \| \|f\| \| \leq D \|f\| \text{ per ogni } f \in X. \quad (4)$$

**Esercizio 4.** Si consideri il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2z\}.$$

- Mostrare che  $X$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ . È chiuso?
- Individuare ed esplicitare il sottospazio  $Y = X^\perp$ .
- Calcolare la proiezione del vettore  $(2, 2, 3)$  su  $X$ .
- Calcolare la proiezione del vettore  $(2, 2, 3)$  su  $Y$ .

## ANALISI MATEMATICA 4

Prova scritta del 20 novembre 2013

**Esercizio 1.** Si consideri lo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ , dove  $\mathcal{L}$  denota la famiglia degli insiemi misurabili secondo la misura unidimensionale di Lebesgue  $\lambda$ . Consideriamo le funzioni di insieme

$$\mu(A) = \lambda(\{x \in A : x \leq 0\}), \quad \nu(A) = \lambda(\{x \in A : x \geq 0\}) \quad \text{per } A \in \mathcal{L}.$$

- Provare che  $\mu, \nu$  sono misure su  $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ . Sono  $\sigma$ -finite?
- Valutare se  $\mu, \nu$  sono assolutamente continue o singolari (oppure né assolutamente continue né singolari) rispetto alla misura  $\lambda$ .
- $\lambda$  è assolutamente continua o singolare rispetto a  $\mu$ ?
- $\mu$  è assolutamente continua o singolare rispetto a  $\nu$ ?

**Esercizio 2.** Utilizzando l'estensione del teorema fondamentale del calcolo, provare che la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , è assolutamente continua.

**Esercizio 3.** Considerata la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-1/n} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1],$$

studiare le convergenze quasi ovunque, quasi uniforme, in misura e in tutti gli spazi  $L^p([-1, 1])$ , per  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Esercizio 4.** Si consideri lo spazio di Hilbert  $H = \ell^2$  delle successioni reali  $x = (x_1, x_2, \dots)$  tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

converga, munito dell'usuale prodotto scalare. Si definisca

$$K = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in H : 0 \leq x_n \leq n^{-3} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si chiede di rispondere alle seguenti domande motivando opportunamente le risposte date.

- L'insieme  $K$  potrebbe essere vuoto? Provare che  $K$  è un sottoinsieme convesso e chiuso di  $H$ .
- Mostrare che l'elemento  $w = (w_1, w_2, \dots)$ , con  $w_n = (-1)^n/n$  per  $n \in \mathbb{N}$ , appartiene ad  $H$ .
- Ricordare il teorema delle proiezioni e calcolare esplicitamente la proiezione dell'elemento  $w$  su  $K$ .