courtesy by Onofrio de Bari

Appunti su spazi di Banach e Hilbert e serie di Fourier astratte

(versione riveduta da Pierluigi Colli)

13 ottobre 2015

Indice

CAPITOLO

1

Spazi di Banach e di Hilbert

1.1 Spazi vettoriali normati

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale reale. Si chiama *norma* in V un'applicazione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ che verifica le condizioni

$$\|u\| \geq 0 \tag{1.1}$$

$$\|u\| = 0 \text{ se e solo se } u = 0 \tag{1.2}$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \tag{1.3}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad \textit{(disuguaglianza triangolare)} \tag{1.4}$$

comunque scelti $u, v \in V$ e comunque scelto $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.1. Dato $1 \leq p < \infty$, la funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\|x\|_p = \Big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\Big)^{1/p} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

è una norma e si dice *norma* p. ✯

Esempio 1.2. La funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\|x\|_\infty = \max\big\{|x_1|, \dots, |x_n|\big\} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

è una norma e si dice *norma infinito*. ✯

Definizione 1.2. Uno spazio vettoriale V su cui è definita una norma si dice *spazio normato*.

Definizione 1.3. Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} d\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \|u - v\| \end{aligned}$$

che associa a una coppia di elementi di V il numero reale $\|u - v\|$ detto *distanza*; la funzione d si chiama *metrica* indotta dalla norma $\|\cdot\|$ su V.

Definizione 1.4. Uno spazio vettoriale dotato di una metrica si dice *spazio metrico*.

Nota 1.1. Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico rispetto alla metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|$, ossia rispetto alla distanza

$$d(u, v) = \|u - v\| \qquad \text{per ogni } v \in V.$$

☞ [2, p. 366] I concetti di intorno di un punto, di punto interno, esterno, frontiera –e tutti gli altri– per uno spazio euclideo si trasferiscono a uno spazio normato semplicemente sostituendo il modulo dei vettori con la norma e le distanza euclidea con la distanza indotta dalla norma.

Definizione 1.5. Due norme $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ definite in uno spazio vettoriale V si dicono *equivalenti* se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$c_1 \|v\| \leq |||v||| \leq c_2 \|v\|$$

per ogni $v \in V$.

Proposizione 1.1. *Dato lo spazio vettoriale X, ogni norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in X.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x con $\|x - x_0\| < \delta$ risulta $|\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$ o, equivalentemente,

$$\|x_0\| - \varepsilon < \|x\| < \|x_0\| + \varepsilon. \tag{1.5}$$

Se si sceglie in particolare $\delta = \varepsilon$ si ha

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| < \delta + \|x_0\| = \|x_0\| + \varepsilon$$

dimostrando così la disuguaglianza destra di (1.5); allo stesso modo si ricava

$$\|x_0\| - \varepsilon = \|x_0 - x + x\| - \varepsilon \leq \|x_0 - x\| + \|x\| - \varepsilon < \varepsilon + \|x\| - \varepsilon$$

provando in tal modo la sussistenza della disuguaglianza sinistra di (1.5) e ottenendo pertanto la tesi. □

1.2 Spazi di Banach

Definizione 1.6. Sia V uno spazio normato. Una successione $\{u_n\}$ di elementi di V si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n \geq \bar{n}$ si ha $\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$, cioè

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

Definizione 1.7. Una successione $\{u_n\}$ a valori nello spazio normato V si dice *convergente* a un elemento u di V se

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Definizione 1.8. Uno spazio metrico V si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in V converge a un elemento di V.

Definizione 1.9. Uno spazio vettoriale V dotato di una norma si dice *spazio di Banach* se è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma, cioè se ogni successione di Cauchy in V risulta convergente.

☞ In uno spazio di Banach i concetti di successione convergente e di successione di Cauchy coincidono.

Esempio 1.3. L'insieme $\mathbb{R}$ con la norma del valore assoluto è uno spazio di Banach. ✯

Esempio 1.4. L'insieme $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidea è uno spazio di Banach. ✯

1.3 Operatori lineari

Definizione 1.10. Dati due spazi vettoriali X e Y, una funzione $f\colon X \to Y$ si dice un'*operatore lineare* se

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.5. Tutti e soli gli operatori lineari che operano da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^5$ sono le trasformazioni lineari

$$T\colon (x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$$

rappresentati da una matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})^{5,3}$ (5 righe e 3 colonne). ✯

Se un operatore lineare è definito fra due spazi normati di dimensione finita, tale operatore è sempre continuo; se invece si ha a che fare con spazi di dimensione infinita, allora la continuità andrà volta per volta verificata.

1.4 Sottospazi normati

Premettiamo che in uno spazio normato le nozioni di punto, punto interno, punto di frontiera, punto esterno, parte interna, frontiera, chiusura, insieme aperto o chiuso o limitato, limite di successsione, somma di una serie e funzione continua a valori in un altro spazio normato sono analoghe a quelle degli spazi euclidei; è sufficiente, infatti, sostituire i moduli dei vettori e le distanze considerate con le norme e con le distanze indotte.

Definizione 1.11. Dato uno spazio normato X, un sottoinsieme Z di X tale che per ogni $x, y \in Z$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda x + \mu y \in Z$ si dice *sottospazio* di X.

Definizione 1.12. Sia V uno spazio normato. Un sottoinsieme C di V è *chiuso* quando ogni punto $x \in \mathbb{R}^n \backslash C$ ha un intorno disgiunto da C.

La definizione 1.12 si basa su quella esposta in [2, p. 115]; in tale definizione l'intorno va, quindi, considerato come intorno rispetto alla metrica indotta dalla norma e quindi si parla di sottoinsieme chiuso rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Definizione 1.13. [2, p. 443] Un sottoinsieme S di dimensione infinita di uno spazio vettoriale V di dimensione infinita è *indipendente* se è indipendente ogni suo sottoinsieme non vuoto finito.

Definizione 1.14. [2, p. 444] Un sottoinsieme S di dimensione infinita di uno spazio vettoriale V di dimensione infinita *genera* V se ogni elemento di V può essere scritto come combinazione lineare finita di elementi di S.

Definizione 1.15. Dato uno spazio vettoriale V, il *sottospazio generato da un sottoinsieme* S di V è il sottospazio che, visto come spazio vettoriale, ha S come sistema di generatori e coincide con l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S.

Definizione 1.16. Dato S sottoinsieme di uno spazio normato V, con i simboli

$$\operatorname{span} S \qquad \text{e} \qquad \overline{\operatorname{span}}\, S$$

si indicano il *sottospazio generato* da S e la chiusura di $\operatorname{span} S$ (ricordiamo che la chiusura di un sottoinsieme A di uno spazio euclideo V è l'insieme dei punti di V che non sono esterni ad A, dove per *punto esterno* intendiamo un punto x per il quale esiste un intorno di x disgiunto da A).

Definizione 1.17. Un sottoinsieme S di uno spazio normato V si dice *denso* quando la sua chiusura è V.

Ricordiamo adesso la caratterizzazione di un sottoinsieme chiuso di uno spazio normato [2, p. 366].

Proposizione 1.2. *Sia V uno spazio normato. Un sottoinsieme C di V è chiuso se e solo se gode della proprietà seguente: se $\{v_n\}$ è una successione di punti di C convergente in V, allora anche il limite di $\{v_n\}$ appartiene a C.*

I sottospazi di spazi normati a dimensione finita sono sempre chiusi, mentre ciò non vale per spazi di dimensione infinita.

Proposizione 1.3. *Sia dato uno spazio di Banach X e sia Z un suo sottospazio chiuso; allora Z è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. L'ipotesi implica l'esistenza di una successione di Cauchy $\{x_n\}$ a elementi in Z tale che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n \geq \bar{n}$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Una successione di Cauchy $\{x_n\}$ in uno spazio di Banach X è anche convergente per $n \to \infty$ ad un elemento $x \in X$; essendo Z un sottospazio chiuso, si ha che $x \in Z$ a norma della Proposizione 1.2 e

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

cioè x_n tende a x elemento di Z. □

Proposizione 1.4. *Tutte le norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.*

Dimostrazione. È solo un'idea della dimostrazione: per provare la tesi, basta dimostrare che qualsiasi norma $\|\cdot\|$ definita su $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla norma $\|\cdot\|_1$, per esempio. Una delle diseguaglianze

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|e_i\| \leq \max\{\|e_i\|, \; i = 1, \ldots, n\} \, \|x\|_1 \qquad \text{per ogni } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

dove e_i denota il vettore con i-esima componente uguale a 1 e le altre uguali a 0, si ottiene facilmente. L'altra disuguaglianza può essere provata per contraddizione, sviluppando un ragionamento più laborioso. □

1.5 Esempi di spazi normati a dimensione infinita

1.5.1 Le funzioni continue su un compatto

Dato un sottoinsieme K compatto di $\mathbb{R}^n$, un esempio di spazio vettoriale a dimensione infinita è l'insieme $C^0(K)$ delle funzioni continue $f\colon K \to \mathbb{R}$. Se si considera ad esempio $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$, si possono introdurre le norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \qquad \text{e} \qquad \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

Ci chiediamo se tali norme sono equivalenti; per rispondere a tale quesito, dobbiamo determinare se esistono due costanti $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1 \|f\|_1 \le \|f\|_\infty \le c_2 \|f\|_1\,. \tag{1.6}$$

Si osserva immediatamente che

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \le \|f\|_\infty$$

quindi per $c_1 = 1$ la disuguaglianza sinistra in (1.6) è verificata. Per verificare la disuguaglianza destra consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } 0 \le x \le 1/n \\ 0 & \text{se } 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

per la quale risulta

$$\|f\|_\infty = 1 \text{ per ogni } n \quad \text{e} \quad \|f\|_1 = \frac{1}{2n};$$

poiché non esiste $c_2 > 0$ tale che per ogni n

$$1 \le \frac{c_2}{2n}$$

le norme non sono equivalenti.

Ci chiediamo ora se l'insieme $C^0([0,1])$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma infinito, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \ge \bar{n}$ si ha $\|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$, cioè

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon.$$

Per x fissato, la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, quindi ammette limite per $n \to \infty$ (che indichiamo con f); fissando n e passando al limite per $m \to \infty$ si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

cioè la convergenza uniforme di f_n a f. Quanto scritto implica la conseguenza che f è continua, pertanto $f \in C^0[0,1]$; questo dimostra che $C^0([0,1])$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma infinito.
Lo spazio $C^0([0,1])$ non è di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Definendo infatti la successione $\{f_n\}$ come

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{se } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

si ottiene (fissato $n > m$) che

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \xrightarrow{m,n\to\infty} 0;$$

la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy, però tende a una funzione discontinua, quindi lo spazio $C^0([0,1])$ non è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$.%cite[p. 68]torelli.
☞ Se uno spazio normato X ha due norme equivalenti, allora lo spazio è completo rispetto a una norma se e solo se è completo rispetto all'altra.
☞ Se uno spazio normato X è completo rispetto a due norme diverse non è detto che le due norme siano equivalenti.

Esempio 1.6. Consideriamo lo spazio normato $\left(C^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$, con K compatto di $\mathbb{R}$. Seguono alcuni esempi di sottospazi di $\left(C^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$.

- le funzioni costanti;
- l'insieme

  $$S = \{f \in C^0([0,1]) \text{ tale che } f(x) = a_1 + a_2 \sin x + a_3 e^x, a_i \in \mathbb{R}\}$$

  è un sottospazio chiuso di $\left(C^0(K), \|\cdot\|_\infty\right)$ di dimensione 3;

- $U = \big\{ f \in C^0([0,1]) \text{ tale che } f \text{ è un polinomio} \big\}$ è un sottospazio di
$$\big(C^0(K), \|\cdot\|_\infty\big)$$
ma non è chiuso, dato che
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \in U$$
$$p_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$
però $e^x \notin U$. ✯

Vediamo ora esempi di operatori lineari $T\colon C^0([0,1]) \to C([1,3])$:

- operatore identicamente nullo;
- $f(x) \to e^{-x} f(1+2x)$;
- fissata una funzione
$$g(t), \quad t \in [1,3],$$
ad esempio continua, l'operatore
$$T\colon f(x) \to \int_1^x g(t) f(1+2t) dt, \qquad x \in [0,1],$$
è ancora lineare.

Si dimostra che lo spazio $C^1([0,1])$ con la norma infinito non è completo.

Esempio 1.7. Non è invece lineare l'operatore $T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ definito da
$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt + 3.$$
✯

1.5.2 Funzioni integrabili su un sottoinsieme misurabile

Sia dato uno spazio di misura $(A, \mathcal{E}, m)$ e sia $B \subseteq A$. Consideriamo l'insieme
$$X = \{f\colon B \to \mathbb{R} \text{ integrabili su } B\}.$$
Definiamo la funzione
$$\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_B |f(x)|\, dm$$
e verifichiamo che si tratta di una norma: si ha

1. $\int_B |f(x)|\,dm \geq 0$ per ogni f;

2. $\int_B |f(x)|\,dm = 0$ se e solo se $f = 0$, infatti se $\int_B |f(x)|\,dm = 0$ si ha $f = 0$ m-q.o. e se si prende come elemento dello spazio X non la singola funzione f, ma la classe di tutte le funzioni $g\colon B \to \mathbb{R}$ integrabili tali che $g = f$ m-q.o. allora tale proprietà della norma sussiste, mentre il viceversa è ovvio;

3. $\int_B |\lambda f(x)|\,dm = |\lambda| \int_B |f(x)|\,dm$;

4. $$\begin{aligned}\int_B |f(x)+g(x)|\,dm &\leq \int_B \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big) dm \\ &= \int_B |f(x)|\,dm + \int_B |g(x)|\,dm.\end{aligned}$$

Lo spazio vettoriale X, costituito dalle classi di funzioni integrabii e tra loro uguali quasi ovunque, dotato della norma

$$\|f\|_1 = \int_B |f(x)|\,dm$$

si indica con $L^1(B)$. $L^1(B)$ risulta essere uno spazio di Banach; considerata infatti una successione di Cauchy $\{f_n\}$ di elementi di $L^1(B)$, cioè una successione per la quale per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

ossia

$$\int_B |f_n(x) - f_m(x)|\,dm \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

esiste f integrabile su B tale che

$$\int_B |f_n(x) - f(x)|\,dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

quindi la successione $\|f_n - f\|_1$ tende a 0 per $n \to \infty$; si è così dimostrato che $L^1(B)$ è uno spazio normato e completo, cioè uno spazio di Banach.

1.6 Spazi di Hilbert

Definizione 1.18. Sia X uno spazio vettoriale reale e

$$(\, , \,) \colon X \times X \to \mathbb{R}$$

un'applicazione (detta *prodotto scalare*) verificante le condizioni seguenti:

1. $(x, x) \geq 0$ per ogni $x \in X$,
2. $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$,
3. $(x, y) = (y, x)$ per ogni $x, y \in X$
4. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

La coppia $\big(X, (\, , \,)\big)$ si dice *spazio prehilbertiano reale*.

In uno spazio prehilbertiano X risulta definita in modo naturale per ogni $x \in X$ la norma

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1.7}$$

Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz. *Per ogni $x, y \in X$ con X spazio prehilbertiano reale, si ha*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto scalare si deduce che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

quindi

$$0 \leq \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \tag{1.8}$$

e che

$$0 \leq \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 \, . \tag{1.9}$$

Da entrambe le disuguaglianze si ottiene

$$-2\,|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{e} \quad 2\,|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ossia

$$2\,|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

Se x, y sono versori, cioè vettori di norma unitaria, si ottiene

$$2\,|(x, y)| \leq 1 + 1 = 2$$

o, che è lo stesso,

$$|(x, y)| \leq 1 = \|x\| \, \|y\| \tag{1.10}$$

quindi la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz è valida per i versori; ancora più semplicemente si dimostra che è valida se $x = 0$ oppure $y = 0$.
Consideriamo adesso $x, y \in X \setminus \{0\}$ non necessariamente versori e definiamo

$$z = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{e} \quad w = \frac{y}{\|y\|}.$$

I vettori z e w così definiti sono versori, quindi per la (1.10)

$$|(z, w)| \leq 1$$

cioè

$$\left| \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right| \leq 1.$$

Dalla bilinearità del prodotto scalare si ricava che

$$\frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{1}{\|y\|} \, |(x, y)| \leq 1$$

quindi

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| \, . \qquad \square$$

Relazione del parallelogramma. *Per ogni $x, y \in X$ con X spazio prehilbertiano reale, si ha*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2 \Big).$$

Dimostrazione. Si ottiene dalla somma delle equazioni (1.8) e (1.9). $\square$

Proposizione 1.5. *Per ogni $x, y \in X$ con X spazio prehilbertiano reale, si ha*

$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \Big).$$

Dimostrazione. Si ottiene dalla differenza delle equazioni in (1.8) e (1.9). $\square$

Mostriamo infine che la funzione definita in (1.7) è una norma; si osserva facilmente che $\sqrt{(x, x)} \geq 0$ per ogni $x \in X$ e che $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0 \in X$.
Inoltre per ogni $x \in X$

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \, \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \, \|x\|$$

e infine, presi comunque $x, y \in X$, vale la disuguaglianza triangolare

$$0 \leq \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \\ \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \Big(\|x\| + \|y\|\Big)^2$$

quindi

$$\|x+y\|^2 \leq \Big(\|x\| + \|y\|\Big)^2;$$

da ciò segue che

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ed è così dimostrato che la funzione in (1.7) è una norma.

Definizione 1.19. Uno spazio prehilbertiano completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare si dice *spazio di Hilbert*.

Esempio 1.8. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

e della norma indotta

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

è uno spazio di Hilbert. ✯

1.7 Spazi L^p

Consideriamo in questo paragrafo e nei sottoparagrafi uno spazio di misura $(A, \mathcal{E}, m)$ e $B \subseteq A$. Se $1 < p < \infty$ si definisce l'insieme

$$L^p(B) = \{\text{classi di } f\colon B \to \mathbb{R} \text{ misurabili , uguali tra loro q.o.} \\ \text{e tali che } |f|^p \text{ è integrabile}\}$$

e su esso si introduce la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_B |f|^p\,dm\right)^{1/p}.$$

Se $p = \infty$ si definisce l'insieme delle funzioni essenzialmente limitate

$$L^\infty(B) = \{\text{classi di } f\colon B \to \mathbb{R} \text{ misurabili, uguali tra loro q.o.} \\ \text{e tali che esiste } c \geq 0 \text{ tale che } |f(x)| \leq c \text{ q.o. in } B\}$$

con norma

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c \text{ q.o. in } B\}.$$

1.7.1 Disuguaglianze notevoli

Definizione 1.20. Due numeri $p, q \in [1, \infty]$ si dicono *esponenti coniugati* se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

con l'intesa che $q = \infty$ se $p = 1$.

Disuguaglianza di Young. *Siano $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$, $1 < p < \infty$, con p, q esponenti coniugati; allora*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dimostrazione. Si può scrivere

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right);$$

quest'ultima disuguaglianza sussiste grazie alla proprietà di concavità della funzione logaritmo, secondo la quale se $A, B > 0$ e $\vartheta \in (0, 1)$ si ha

$$\ln\Big(\vartheta A + (1 - \vartheta)B\Big) \geq \vartheta \ln A + (1 - \vartheta) \ln B.$$

Si deduce allora che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$ □

Disuguaglianza di Hölder. *Siano p e q due esponenti coniugati e siano $f \in L^p(B)$, $g \in L^q(B)$; allora la funzione fg appartiene a $L^1(B)$ e inoltre*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Dimostrazione. Se $fg = 0$ quasi ovunque la disuguaglianza è immediatamente dimostrata. Il caso limite è per $p = 1$ e $q = \infty$; si ha

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty \qquad \text{per q.o. } x \in B,$$

con $|fg|$ integrabile perché maggiorata da un'altra funzione integrabile, pertanto si può scrivere

$$\int_B |f(x)g(x)|\, dm = \|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \int_B |f(x)|\, dm = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

e così si è dimostrato il caso limite. Se, infine, consideriamo il caso $1 < p < \infty$, dalla disuguaglianza di Young si ha che

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}\,|f(x)|^p + \frac{1}{q}\,|g(x)|^q \qquad \text{per q.o. } x \in B.$$

Integrando ambo i membri si ottiene

$$\|fg\|_1 \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q}$$

e per ogni $t > 0$ si può scrivere

$$\left\|(tf)\left(\frac{g}{t}\right)\right\|_1 \leq \frac{t^p}{p}\,\|f\|_p^p + \frac{1}{qt^q}\,\|g\|_q^q\,.$$

Definiamo ora la funzione

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p}\,\|f\|_p^p + \frac{1}{qt^q}\,\|g\|_q^q \qquad (t > 0)$$

e determiniamo i valori che la minimizzano, calcolando a tal fine

$$\varphi'(t) = t^{p-1}\,\|f\|_p^p - t^{-q-1}\,\|g\|_q^q\,;$$

si trova come zero di $\varphi'(t)$ il valore

$$\bar{t} = \frac{\|g\|_q^{1/p}}{\|f\|_p^{1/q}};$$

che, sostituito nell'espressione di φ, fa ottenere dopo semplici (anche se un po' lunghi) calcoli il risultato

$$\varphi(\,\bar{t}\,) = \|f\|_p\,\|g\|_q\,. \qquad \square$$

Riguardo allo spazio $L^\infty(B)$ dotato della norma

$$\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 \mid |f(x)| \leq c \text{ per q.o. } x \in B\}$$

si può affermare che:

- $\|f\|_\infty$ è in realtà un minimo dell'insieme cui si riferisce;
- $\|f\|_\infty$ è una norma;
- vale la disuguaglianza triangolare.

L'insieme $L^\infty(B)$ è pertanto uno spazio normato.
Scriviamo ora la disuguaglianza triangolare in termini di norma $\|\cdot\|_p$.

Disuguaglianza di Minkowski. *Sia $p \in (1, +\infty)$ e siano $f, g \in L^p(B)$; allora $f + g \in L^p(B)$ e inoltre*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la relazione

$$|(f+g)(x)|^p \leq \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big)^p \leq 2^p\,|f(x)|^p + 2^p\,|g(x)|^p \tag{1.11}$$

che implica che la funzione $|(f+g)(x)|^p$ è integrabile perché maggiorata dalla somma di funzioni integrabili. Poi integriamo, riscrivendo quindi la prima parte della (1.11) come

$$\int_B |f+g|^p\,dm \leq \int_B |f+g|^{p-1}\big(|f(x)| + |g(x)|\big)dm.$$

Se q è l'esponente coniugato di p, la funzione $|f+g|^{p-1}$ appartiene a $L^q(B)$; infatti in tal caso si ha

$$\left(|f+g|^{p-1}\right)^q = |f+g|^{pq-q} = |f+g|^p$$

che, come abbiamo visto, è integrabile. Si ottiene dunque

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_B |f+g|^p\,dm \leq \int_B |f+g|^{p-1}\big(\,|f| + |g|\,\big)dm \\
&\leq \int_B |f+g|^{p-1}\,|f|\,dm + \int_B |f+g|^{p-1}\,|g|\,dm \\
&\leq \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q\,\|f\|_p + \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q\,\|g\|_p \\
&= \|f+g\|_p^{p-1}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)
\end{aligned}$$

e pertanto

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|f\|_p\,.$$ □

A questo punto si verifica agevolmente che l'applicazione da $L^p(B)$ in $\mathbb{R}$

$$\|f\|_p = \left(\int_B |f|^p\,dm\right)^{1/p};$$

è una norma.
☞ Non si considerano gli spazi L^p per $0 < p < 1$ perché in tal caso gli insiemi del piano del tipo $\{\|x\|_p \leq r\}$, $r > 0$, non sono convessi, quindi non vale la disuguaglianza triangolare se $p < 1$.

Teorema 1.1. *Sia* $(A, \mathcal{E}, m)$ *uno spazio di misura,* B *un sottoinsieme misurabile di* A *e* $p \in [1, \infty]$*; allora l'insieme* $L^p(B)$ *è uno spazio di Banach. In particolare* $L^2(B)$ *è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare*

$$(f, g) = \int_B f(x)g(x)dm \qquad f, g \in L^2(B).$$

Dimostrazione. Consideriamo $1 \leq p < \infty$ e sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy a elementi in $L^p(B)$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon.$$

È facile controllare che, per provare la tesi, basta trovare una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ convergente a una funzione f in $L^p(B)$. Notiamo ora che, se prendiamo $\varepsilon = 1/2$ nella condizione di Cauchy, esisterà un indice n_1 tale che per ogni $n \geq n_1$

$$\|f_n - f_{n_1}\|_p \leq \frac{1}{2}.$$

Se poi prendiamo $\varepsilon = 1/2^2$, esiste n_2 (che scegliamo maggiore di n_1) tale che per ogni $n \geq n_2$

$$\|f_n - f_{n_2}\|_p \leq \frac{1}{2^2}$$

e così via fino a considerare $\varepsilon = 1/2^k$ per il quale esiste $n_k > n_{k-1}$ tale che per ogni $n \geq n_k$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

Si è in tal modo costruita una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che per ogni k

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

Vogliamo ora provare che tale sottosuccessione risulta convergente in $L^p(B)$. Consideriamo per $k = 1, \ldots, n$ le funzioni

$$g_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \left|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right|;$$

la successione $\{g_k\}$ è monotona crescente e inoltre, usando la disuguaglianza triangolare, si controlla che

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \left\|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^k} \leq 1.$$

Se ora si applica il teorema di Beppo Levi, si ricava che $g_n(x)$ converge m-q.o. alla funzione limite

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right| ;$$

con $g \in L^p(B)$; tale funzione è di potenza p-esima integrabile. Se poi $j > i$ si ha

$$\begin{aligned} \left| f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x) \right| &\le \left| f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x) \right| + \cdots + \left| f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) \right| \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| \le \sum_{k=i}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_i}(x) \right| \\ &\le g(x) - g_{i-1}(x) \end{aligned}$$

cosicchè

$$\left| f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x) \right| \le g(x) - g_{i-1}(x) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

cioè per q.o. $x \in B$ la successione $f_{n_k}(x)$ è di Cauchy, e dunque converge a un limite che chiameremo $f(x)$. Risulta in tal modo definita (quasi ovunque) una funzione f su B. Facendo tendere j a infinito si ottiene

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| \le g(x) - g_{i-1}(x) \le g(x)$$

ed elevando a p

$$|f(x) - f_{n_i}(x)|^p \le |g(x)|^p$$

con la funzione a primo membro che è integrabile e, dato che $f_{n_i} \in L^p(B)$, anche $f \in L^p(B)$. A questo punto, applicando il teorema di Lebesgue della convergenza dominata, si ottiene

$$\lim_{i \to \infty} \int_B |f(x) - f_{n_i}(x)|^p = \|f - f_{n_i}\|_p^p = 0,$$

il che conclude la dimostrazione del caso $1 \le p < \infty$.
Dimostriamo ora il caso $p = \infty$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un indice $\bar{n}_k$ tale che per ogni $n, m \ge \bar{n}_k$

$$\|f_n - f_m\|_\infty \le \frac{1}{k};$$

esiste quindi un insieme trascurabile C_k tale che per ogni $n, m \ge \bar{n}_k$ si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{1}{k}$$

per ogni $x \in B \backslash C_k$. L'insieme

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$$

è ancora trascurabile; infine, si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\bar{n}_k$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}_k$ e per ogni $x \in B \backslash C$ si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

La successione $\{f_n\}$ risulta, pertanto, essere una successione di Cauchy in $B \backslash C$ rispetto alla metrica della convergenza uniforme; esiste allora una funzione f tale che $f_n \to f$ uniformemente in $B \backslash C$. Estendendo f a tutto B con valore nullo per gli $x \in C$ si ottiene la tesi.
La verifica che $L^2(B)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito è immediata. $\square$

Corollario 1.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione convergente in $L^p(B)$ a una funzione f; allora esistono una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ e una funzione $h \in L^p(B)$ tali che*

1. *$f_{n_k} \to f$ quasi ovunque in B;*
2. *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se $f_n \to f$ in L^p, allora f_n è una successione di Cauchy in $L^p(B)$, quindi esiste una sottosuccessione f_{n_k} convergente quasi ovunque a $\bar{f}$ in L^p; per il teorema di Lebesgue esiste una funzione g tale che

$$\left|\bar{f}(x) - f_{n_k}(x)\right| \leq g(x);$$

quindi

$$|f_{n_i}(x)| \leq \left|\bar{f}(x)\right| + g(x),$$

e possiamo porre $h = \left|\bar{f}\right| + g$. Dobbiamo infine verificare che $\bar{f} = f$; poiché $f_{n_k} \to \bar{f}$ in $L^p(B)$ per $k \to \infty$, l'unicità del limite in $L^p(B)$ assicura che $f = \bar{f}$. $\square$

In generale, la convergenza in L^p non implica la convergenza q.o.; va però osservato che se una successione di funzioni f_n tende a f in L^∞, allora al tendere di n a ∞ si ha anche $f_n \to f$ q.o.
☞ La norma p è indotta dal prodotto scalare se e solo se $p = 2$; inoltre $L^p(B)$ è uno spazio di Hilbert se e solo se $p = 2$, perché solo in tal caso vale la regola del parallelogramma. Si ha, infatti, che l'uguaglianza

$$\|u + v\|_p^2 + \|u - v\|_p^2 = 2\Big(\|u\|_p^2 + \|v\|_p^2\Big), \quad u, v \in L^p(B),$$

sussiste solo se $p = 2$.

1.7.2 Inclusioni fra spazi L^p

Ci poniamo ora la seguente domanda: dato B sottoinsieme di uno spazio di misura $(A, \mathcal{E}, m)$, l'insieme $L^p(B)$ è incluso in $L^q(B)$ per qualche q? In particolare, se $B = \mathbb{R}$, si ha $L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, cioè per ogni $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$? La risposta è negativa; basta considerare f funzione costantemente uguale a 1. Viceversa, vale $L^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$? La risposta è ancora negativa; se infatti si considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1/|x|^{1/2} & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

si verifica che $f \in L^1(\mathbb{R})$ ma $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$.
Se $B = (1, +\infty)$ si ha $L^2(B) \subseteq L^1(B)$? Anche in questo caso la risposta è negativa, basta considerare la funzione $f(x) = 1/x$. Invece, nel caso di un insieme B di misura finita si ha il seguente risultato.

Proposizione 1.6. *Sia $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e $B \subseteq A$, B misurabile. Se $m(B) < \infty$, si ha*

$$L^p(B) \subset L^q(B)$$

per ogni $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

1.8 Spazi di successioni

Se $p \in [1, +\infty)$ si definisce l'insieme

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

mentre se $p = +\infty$ si definisce l'insieme

$$\ell^\infty = \left\{ x = (x_n) \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}.$$

Si verifica che ℓ^p e ℓ^∞ sono spazi vettoriali (con le operazioni di somma di successioni e prodotto di un numero reale per una successione) e hanno dimensione infinita (perché i punti di ℓ^p hanno infinite componenti). Introducendo le norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p},$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

si dimostra che gli spazi predetti sono spazi di Banach.

Esercizio 1.1. Lo spazio ℓ^p non è uno spazio di Hilbert se $p \neq 2$.

Svolgimento. Considerati $x = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ e $y = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ appartenenti a ℓ^p, si ha

$$\begin{aligned} x + y &= (1, 1, 0, \dots, 0, \dots), \\ x - y &= (1, -1, 0, \dots, 0, \dots). \end{aligned}$$

Quindi, se $p \neq \infty$ risulta

$$\begin{aligned} &\|x\|_p = 1, \qquad \|y\|_p = 1, \\ &\|x + y\|_p = 2^{1/p}, \qquad \|x - y\|_p = 2^{1/p}. \end{aligned}$$

La regola del parallelogramma

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2\Big(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\Big)$$

esplicitando dà

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 2 \cdot 2^{2/p} = 2(1 + 1)$$

che vale se e solo se $p = 2$. Se $p = \infty$ si ha

$$\begin{aligned} &\|x\|_p = 1, \qquad \|y\|_p = 1, \\ &\|x + y\|_p = 1, \qquad \|x - y\|_p = 1. \end{aligned}$$

Quindi la regola del parallelogramma dà $2 \neq 2(1 + 1)$.

1.8.1 Inclusioni fra spazi ℓ^p

Se $p \leq q$, si ha $\ell^p \subseteq \ell^q$; presa infatti una successione $x = (x_n) \in \ell^p$, si ha $|x_n| \to 0$ per $n \to \infty$, dato che una successione non divergente ha il termine generale che tende a 0. Per le proprietà delle potenze (tenuto conto che al limite si è vicini a 0) si ha definitivamente

$$|x_n|^q \leq |x_n|^p \,,$$

quindi $\ell^p \subseteq \ell^q$.
Un controesempio è la successione

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

appartenente a ℓ^2 ma non a ℓ^1.

1.9 Operatori lineari continui e limitati

Definizione 1.21. Dati due spazi normati X e Y, un operatore $T\colon X \to Y$ si dice *limitato* se esiste una costante $L \geq 0$ tale che per ogni $x \in X$ si ha

$$\|Tx\|_Y \leq L\|x\|_X.$$

Esempio 1.9. Sia $T(x) = mx$ con m fissato in $\mathbb{R}$; per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$|T(x)| \leq |m|\,|x|$$

quindi l'operatore T è limitato. ✯

Non va confuso il concetto di operatore limitato con quello di funzione limitata; un operatore limitato è una funzione *linearmente* limitata.

Esempio 1.10. La funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione limitata ed è un operatore limitato, ma non è un operatore lineare. ✯

Esempio 1.11. La funzione $f(x) = x/|x|$ se $x \neq 0$, $f(x) = 0$ se $x = 0$, è una funzione limitata ma non è un operatore limitato (basta prendere valori di x vicini a 0 per rendersi conto). ✯

Teorema 1.2. *Un operatore lineare $T\colon X \to Y$ è continuo se e solo se è limitato.*

Dimostrazione. È facile controllare che linearità e limitatezza implicano la continuità dell'operatore. Dimostriamo che se T è continuo è anche limitato, considerando in particolare il punto $\{0\}$ (il che non fa perdere di generalità, dato che se un operatore è continuo è continuo anche in $\{0\}$). Per definizione, se T è continuo in $\{0\}$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ con $\|x\|_X \leq \delta$ si ha

$$\|T(x)\|_X \leq \varepsilon. \tag{1.12}$$

Preso z arbitrario in $X\backslash\{0\}$ si osserva che l'elemento $x = \delta z/\|z\|$ verifica l'uguaglianza

$$\|x\|_X = \left\|\frac{\delta z}{\|z\|}\right\|_X = \delta,$$

per cui applicando la (1.12) abbiamo

$$\|T(x)\|_X = \left\|T\left(\frac{\delta z}{\|z\|}\right)\right\|_X = \frac{\delta}{\|z\|_X}\,\|T(z)\|_Y \leq \varepsilon$$

quindi

$$\|T(z)\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\,\|z\|_X$$

disuguaglianza che vale sia per $z \neq 0$ che per $z = 0$; prendendo dunque $L = \varepsilon/\delta$ si ottiene la tesi. $\square$

Per indicare la famiglia degli operatori lineari limitati da X a Y si usa il simbolo $\mathcal{L}(X, Y)$; l'insieme $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale. Si può dotare della norma

$$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}, x \in X \backslash \{0\} \right\}$$

e poiché tale estremo superiore esiste finito ed è minore o uguale di ogni costante di limitatezza si ha

$$\|T\| = \inf\{L \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq L \|x\|_X \text{ per ogni } x \in X\}.$$

L'elemento nullo dello spazio è l'operatore nullo, ossia quello che a ogni elemento di X associa lo zero di Y.

Teorema 1.3. *Se Y è uno spazio di Banach, lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Si abbia una successione di Cauchy $\{T_n\}$ a valori in $\mathcal{L}(X, Y)$; questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|(T_n - T_m)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon.$$

Fissato $x \in X, x \neq 0$, quanto scritto significa

$$\|(T_n - T_m)(x)\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X$$

cioè che la successione $\{T_n(x)\}$ è una successione di Cauchy a valori in Y. Essendo per ipotesi Y uno spazio di Banach (e quindi è anche completo), la successione $\{T_n(x)\}$ converge a un elemento di Y che indichiamo con $T(x)$; in questo modo si è costruito l'operatore T che a $x \in X \backslash \{0\}$ associa il limite per $n \to \infty$ di $\{T_n(x)\}$ in Y, ponendo inoltre, $T(0_X) = (0_Y)$.
L'operatore T appena costruito è lineare, infatti

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n y = \alpha T x + \beta T y$$

ed è limitato, dato che esiste n^* tale che per ogni $n, m \geq n^*$ si può scrivere

$$\|T_n - T_{n^*}\| \leq 1$$

quindi per ogni $n \geq n^*$

$$\|T_n\| \leq 1 + \|T_{n^*}\|.$$

Da quanto scritto si deduce

$$\|T_n\| \leq \max\big\{\|T_1\|, \ldots, \|T_{n^*-1}\|, 1 + \|T_{n^*}\|\big\}$$

ossia

$$\|Tx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \, \|x\| \leq c \|x\| .$$

Tornando a $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X;Y)}$ si ha, passando al limite per $m \to \infty$, che per ogni $x \in X \backslash \{0\}$

$$\frac{\|(T_n - T)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$

quindi per ogni $x \in X\backslash\{0\}$ risulta

$$\|T_n - T\|_Y = \sup \frac{\|(T_n - T)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$

cioè lo spazio $\mathcal{L}(X;Y)$ è di Banach. □

Un caso particolare di operatori lineari è quello dei funzionali lineari e continui, ovvero delle applicazioni $L\colon X \to \mathbb{R}$ con X spazio normato.

Definizione 1.22. Lo spazio $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ si dice *spazio duale* dello spazio normato X e viene indicato con X' o con X^*; i suoi elementi sono i funzionali lineari e continui da X a $\mathbb{R}$.

Seguono alcuni esempi di funzionali lineari.

Esempio 1.12. Sia H uno spazio di Hilbert e fissiamo $u \in H$, considerando l'operatore

$$\begin{aligned} L\colon H &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto (u,v) \end{aligned}$$

L è un operatore lineare perché è definito come prodotto scalare; è altresì continuo perché è limitato.
Un caso particolare si ha se $H = \ell^2$. Fissato

$$u = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

consideriamo

$$\begin{aligned} L\colon \ell^2 &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto (u,v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} v_i. \end{aligned}$$

L'operatore L appartiene a $\left(\ell^2\right)' = \mathcal{L}\left(\ell^2, \mathbb{R}\right)$. Ci chiediamo se le norme introdotte in questi spazi coincidono. Si ha

$$\|L\|_{(\ell^2)'} = \sup_{\substack{x\in\ell^2\\ x\neq 0}} \frac{L(x)}{\|x\|_{\ell^2}} = \sup_{\substack{x\in\ell^2\\ \|x\|=1}} |L(x)|\,;$$

per ogni $v \in \ell^2$ risulta

$$|L(v)| = |(u,v)| \leq \|u\|_{\ell^2}\,\|v\|_{\ell^2}\,.$$

quindi

$$\|L\|_{(\ell^2)'} = \sup_{\substack{v\in\ell^2\\ \|v\|=1}} |L(v)| \leq \|u\|_{\ell^2}\,.$$

Se v ha norma 1, allora si ha

$$|L(v)| \leq \|u\|_{\ell^2}\,,$$

quindi

$$\|L\|_{(\ell^2)'} \leq \|u\|_{\ell^2}\,;$$

se si trova un elemento $v \in \ell^2$ tale che $\|v\|_{\ell^2} = 1$ e $|L(v)| = \|u\|_{\ell^2}$ le norme coincideranno; in particolare, considerato $v = u/\,\|u\|_{\ell^2}$ si ottiene

$$L(v) = \|u\|_{\ell^2}$$

e quindi $\|L\|_{(\ell^2)'} = \|u\|_{\ell^2}$. ✯

Esempio 1.13 (Operatori di shift)**.** Consideriamo l'operatore $S\colon \ell^1 \to \ell^1$ detto *operatore di shift* e definito per ogni $x \in \ell^1$ da

$$S(x) = y$$

con y successione di ℓ^1 di termine generale $y_n = x_{n+1}$ (per ogni $n \geq 1$); in altri termini, se $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, si ha $S(x) = (x_2, x_3, \dots)$. L'operatore S è lineare. Per verificare che è continuo verifichiamo che è limitato, cioè che

$$\|S(x)\|_{\ell^1} \leq M\,\|x\|_{\ell^1}\,;$$

tale disuguaglianza è verificata banalmente per $M = 1$, quindi $S \in \mathcal{L}(\ell^1, \ell^1)$. Verifichiamo ora che, posto

$$\|S\|' = \|S\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)}\,,$$

si ha

$$\|S\|' = \sup_{x\in\ell^1} \frac{\|S(x)_{\ell^1}\|}{\|x\|_{\ell^1}} = \sup_{\substack{x\in\ell^1 \\ \|x\|=1}} \|S(x)\|_{\ell^1}$$

quindi $\|S\|' \leq 1$. Cerchiamo $x \in \ell^1$ tale che $\|S(x)\|_{\ell^1} = 1$ e $\|x\|_{\ell^1} = 1$; per

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$$

si ha $S(e_2) = e_1$, $\|e_2\|_{\ell^1} = 1$, $\|S(e_2)\|_{\ell^1} = 1$ e se ne ricava che $\|S\|' = 1$. ✯

Esempio 1.14 (Operatori di Fredholm)**.** Sia $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si abbia l'operatore

$$T\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]),$$

detto *operatore di Fredholm*, definito per ogni $u \in C^0([0,1])$ da

$$T(u)(x) = \int_0^1 k(t,x)u(t)dt.$$

Si controlla che T è un operatore lineare. Introducendo in $C^0([0,1])$ la norma infinito definita per ogni $u \in C^0([0,1])$ da

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|,$$

T è continuo se e solo se è limitato, quindi se e solo se

$$\|T(u)\|_\infty \leq M \|u\|_\infty$$

per qualche costante $M > 0$. Ora si ha

$$\|T(u)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |T(u)(x)| \leq \|u\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,x)|\, dt$$

e dunque possiamo prendere

$$M = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,x)|\, dt.$$

✯

1.9.1 Altri spazi di successioni

Indichiamo con c lo spazio vettoriale delle successioni convergenti, con c_0 quello delle successioni infinitesime e con c_{00} quello delle successioni definitivamente nulle, cioè quelle successioni $x = (x_n)$ tali che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq k$ si ha $x_n = 0$. Osserviamo innanzitutto che

$$c_{00} \subset c_0 \subset c$$

e che se $p \neq \infty$ si ha

$$c_{00} \subset \ell^p \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty.$$

Gli insiemi c e c_0 sono chiusi in ℓ^∞; presa infatti una successione

$$x^n = \left(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n, \ldots\right) \in c \quad \text{per ogni } n$$

e convergente a $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\right)$, si ha per ogni n

$$\lim_{k\to\infty} x_k^n = a_n$$

e si dimostra che $x \in c$ con $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Analogamente si opera per c_0.
L'insieme c_{00} è denso in ℓ^p, se $p \neq \infty$ e la chiusura di c_{00} rispetto a $\|\cdot\|_p$ è ℓ^p. Per ogni $x \in \ell^p$ esiste $(x^n) \subset c_{00}$ tale che $x^n \to x$ per $n \to \infty$.
L'insieme c_{00} non è chiuso in ℓ^∞ e la chiusura di c_{00} in ℓ^∞ è c_0. Infine, l'insieme $\ell^1 \subset \ell^\infty$ non è chiuso in ℓ^∞; la sua chiusura è di fatto ancora c_0.

1.10 Teorema delle proiezioni

Definizione 1.23. Sia H uno spazio di Hilbert. Un sottoinsieme A di H è *convesso* se per ogni $x, y \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$tx + (1-t)y \in A.$$

Teorema 1.4 (Teorema delle proiezioni)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $K \subset H$ un convesso chiuso non vuoto. Allora per ogni $f \in H$ esiste un unico $u \in K$ tale che*

$$\|f-u\| = \min_{v\in K} \|f-v\| = d(f,K). \tag{1.13}$$

Inoltre u è anche l'unica soluzione della disuguaglianza variazionale

$$(f-u, v-u) \leq 0 \quad \textit{per ogni } v \in K. \tag{1.14}$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue il procedimento esposto in [1, p. 127]. Sia $\{v_n\}$ una successione minimizzante di elementi di K, ossia con le proprietà

- $v_n \in K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\|f - v_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf\limits_{v\in K} \|f - v\|$

e proviamo innanzitutto che $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy. Applichiamo la regola del parallelogramma agli elementi $a = f - v_n$ e $b = f - v_m$ scrivendo

$$\|2f - (v_n + v_m)\|^2 + \|-v_n + v_m\|^2 = 2\Big(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\Big),$$

quindi dividiamo per 4 ottenendo

$$\frac{\|2f - v_n + v_m\|^2}{2^2} + \frac{1}{4}\|v_n - v_m\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\Big),$$

$$\left(\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|\right)^2 + \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\Big). \quad (1.15)$$

Poiché il sottoinsieme K di H è un convesso e v_n, v_m sono elementi di K, anche l'elemento $\dfrac{v_n + v_m}{2}$ appartiene a K (basta scegliere $t = 1/2$ nella definizione di convesso); posto

$$d = \inf_{v\in K} \|f - v\|$$

si ha

$$d^2 \le \left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2$$

quindi da (1.15) si ricava che

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|v_m - v_n\|^2 &= \frac{1}{2}\Big(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\Big) - \left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}\Big(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\Big) - d^2\end{aligned}$$

e allora si conclude facilmente che

$$\|v_m - v_n\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

cioè $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy. Poiché H è uno spazio di Hilbert, esiste allora un elemento $u \in H$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = u$; essendo K chiuso e $v_n \in K$ per ogni n, l'elemento u appartiene a K, quindi da

- $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = u$,
- $\|f - v_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf\limits_{v\in K} \|f - v\|$

si deduce che $\|f-u\| = d$ e questo prova l'esistenza di u che soddisfa (1.13). Proviamo adesso che u soluzione di (1.13) risolve anche la disuguaglianza variazionale (1.14). Sia $v \in K$ e definiamo l'elemento

$$w = (1-t)u + tv, \qquad t \in (0,1],$$

che appartiene a K perché K è convesso; si ha allora

$$\begin{aligned}\|f-u\|^2 \le \|f-w\|^2 &= \|f-(1-t)u-tv\|^2 = \|f-u+t(u-v)\|^2\\ &= \|f-u\|^2 + t^2\|u-v\|^2 - 2t(f-u,v-u);\end{aligned}$$

quindi

$$2(f-u,v-u) \le t\,\|u-v\|^2$$

e se $t \to 0$ si ha

$$(f-u,v-u) \le 0.$$

Viceversa, se u risolve (1.14), allora

$$\|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 = 2(f-u,v-u) - \|u-v\|^2 \le 0$$

e dunque

$$\|u-f\|^2 \le \|v-f\|^2 \qquad \text{per ogni } v \in K \text{ ed } f \in H.$$

Dimostriamo infine l'unicità della soluzione di (1.14). Supponiamo che u_1 e u_2 siano due elementi di K che verificano la disuguaglianza variazionale (1.14), cioè che

$$(f-u_1, v-u_1) \le 0 \qquad \text{per ogni } v \in K, \tag{1.16}$$

$$(f-u_2, v-u_2) \le 0 \qquad \text{per ogni } v \in K. \tag{1.17}$$

Scegliamo $v = u_2$ in (1.16) e $v = u_1$ in (1.17), ricavando

$$\begin{aligned}(f-u_1, u_2-u_1) \le 0 \qquad \text{per ogni } v \in K,\\ (f-u_2, u_1-u_2) \le 0 \qquad \text{per ogni } v \in K.\end{aligned}$$

Sommando $(f-u_1, u_1-u_2) \ge 0$ e $(u_2-f, u_1-u_2) \ge 0$ si ottiene

$$(f-u_1+u_2-f, u_1-u_2) \ge 0,$$

quindi

$$\|u_1-u_2\|^2 \le 0$$

e ciò dimostra che $u_2 = u_1$. $\square$

1.11 Proiezioni

Definizione 1.24. L'elemento u la cui esistenza e unicità è garantita dal teorema 1.4 si indica con $u = p_K^f = P_K(f)$ e si dice *proiezione* di f su K.

Proposizione 1.7. *Nelle stesse ipotesi del teorema delle proiezioni sui convessi, se f_1, f_2 appartengono allo spazio di Hilbert H e $p_K^{f_1}, p_K^{f_2}$ sono le rispettive proiezioni sul convesso chiuso K, allora*

$$\|p_K^{f_1} - p_K^{f_2}\| \leq \|f_1 - f_2\| \, .$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$(p_K^{f_1} - f_1, p_K^{f_1} - v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in K \tag{1.18}$$
$$(p_K^{f_2} - f_2, p_K^{f_2} - v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in K \tag{1.19}$$

scegliendo $v = p_K^{f_2}$ in (1.18) e $v = p_K^{f_1}$ in (1.19). Sommiamo per ottenere

$$\left(p_K^{f_1} - f_1 - p_K^{f_2} + f_2, p_K^{f_1} - p_K^{f_2}\right) \leq 0$$

e quindi passando alle norme e per le proprietà del prodotto scalare si ha

$$\|p_K^{f_1} - p_K^{f_2}\|^2 \leq \|p_K^{f_1} - p_K^{f_2}\| \, \|f_1 - f_2\| \, ,$$

da cui semplificando

$$\|p_K^{f_1} - p_K^{f_2}\| \leq \|f_1 - f_2\| \, . \qquad \square$$

☞ L'operatore di proiezione $P_K \colon H \to K$ è lipschitziano di costante 1, in particolare continuo; non è, in generale, lineare (è lineare nel caso di un sottospazio K).
☞ Fra i sottoinsiemi convessi chiusi non vuoti di H vi sono in particolare i sottospazi chiusi di H.

Corollario 1.2. *Sia H uno spazio di Hilbert e K un sottospazio chiuso di H. Allora per ogni $f \in H$ esiste ed è unico $u \in K$ tale che valga* (1.13)*; inoltre tale u è anche l'unica soluzione dell'uguagliarza variazione*

$$(u, w) = (f, w) \quad \textit{per ogni } w \in K. \tag{1.20}$$

Dimostrazione. Dal teorema delle proiezioni si ha

$$(f - u, v - u) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in K;$$

scelto $v = u + w$ con w generico elemento di K, si ottiene

$$(f - u, w) \leq 0.$$

Scelto ora $v = u - w$ si ottiene

$$(f - u, -w) \leq 0$$

quindi $(f - u, w) \geq 0$, cosicché $(f - u, w) = 0$ per ogni $w \in K$. $\square$

Proposizione 1.8. *Se K è un sottospazio chiuso di H, l'operatore P_K è lineare.*

Dimostrazione. Si può scrivere

$$\begin{aligned}\big(P_K(\alpha f + \beta g), w\big) &= (\alpha f + \beta g, w) = \alpha(f, w) + \beta(g, w)\\ &= \alpha\big(P_K(f), w\big) + \beta\big(P_K(g), w\big) = \big(\alpha P_K(f) + \beta P_K(g), w\big)\end{aligned}$$

per ogni $w \in K$. Una proprietà del prodotto scalare ci permette di affermare che se $u, v \in K$ e

$$(u, w) = (v, w) \quad \text{per ogni } w \in K,$$

allora $u = v$; si ha infatti che

$$(u, w) = (v, w)$$

implica $(u - v, w) = 0$ per ogni $w \in K$ e la tesi si ottiene scegliendo $w = u - v$. L'applicazione di tale proprietà permette allora di dedurre

$$P_K(\alpha f + \beta g) = \alpha P_K(f) + \beta P_K(g). \qquad \square$$

☞ Se K è un sottospazio chiuso non vuoto di H, l'operatore P_K appartiene a $\mathcal{L}(H, H)$ e risulta $\|P_K\| = 1$; infatti da $\|P_K\| \leq 1$ ricaviamo che

$$\|P_K(f_1 - f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\|$$

e ciò implica

$$\|P_K(f)\| \leq \|f\|$$

per ogni $f \in H$; si osserva inoltre che $P_K(f) = f$ per ogni $f \in K$, quindi il valore

$$\|P_K\| = \sup_{\substack{f \in H\\ f \neq 0}} \frac{\|P_K(f)\|}{\|f\|} = 1$$

viene raggiunto da tutte le $f \in K$.

☞ L'operatore P_K è un operatore idempotente, ossia $P_K^2 = P_K$.

Definizione 1.25. Sia H uno spazio di Hilbert e $K \subseteq H$ non vuoto. Si dice *ortogonale* di K l'insieme

$$K^{\perp} = \{z \in H \text{ tale che } (z, w) = 0 \text{ per ogni } w \in K\}$$

Definizione 1.26. Due vettori z, w si dicono *ortogonali* se $(z, w) = 0$.

Proposizione 1.9. *L'insieme $K^\perp$ è un sottospazio chiuso di H.*

Dimostrazione. $K^\perp$ è sicuramente un sottospazio, in base alla linearità del prodotto scalare; se infatti $u, v \in K^\perp$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(u, w) = 0.$$

Verifichiamo la chiusura, cioè che, data una successione $\{u_n\}$ a elementi in $K^\perp$ convergente a $u \in H$, l'elemento u appartiene a $K^\perp$. Per ogni $w \in K$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha $(u_n, w) = 0$ con

$$|(u_n - u, w)| \leq \|u_n - u\| \, \|w\|$$

tendente a zero per $n \to \infty$ perché $\|u_n - u\|$ tende a zero per $n \to \infty$; se ne ricava che al tendere di n a infinito è

$$(u, w) = 0$$

cioè $u \in K^\perp$. □

Teorema 1.5 (Teorema di decomposizione ortogonale)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia K un suo sottospazio chiuso. Allora $H = K \oplus K^\perp$ (cioè H è somma diretta di K e $K^\perp$), ossia per ogni $u \in H$ esistono $z \in K$ e $w \in K^\perp$ tali che $u = z + w$ e tale decomposizione è unica.*

Dimostrazione. Sia $u \in H$. Poiché K è chiuso, si può applicare il Corollario 1.2 al teorema delle proiezioni, quindi l'elemento $z = P_K(u)$ verifica l'uguaglianza

$$(z, x) = (u, x)$$

per ogni $x \in K$; analogamente, l'elemento $w = u - z$ verifica l'uguaglianza

$$(w, x) = (u - z, x) = 0$$

per ogni $x \in K$ e dunque $w \in K^\perp$.
Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che esistano due decomposizioni di u come

$$u = z_1 + w_1 = z_2 + w_2;$$

allora da $z_1 + w_1 = z_2 + w_2$ si ottiene

$$z_1 - z_2 = w_2 - w_1$$

con $z_1 - z_2 \in K$ e $w_2 - w_1 \in K^\perp$, quindi appartenenti a $K \cap K^\perp = \{0\}$; da questo si deduce che $z_1 = z_2$ e $w_1 = w_2$, pertanto la decomposizione di u è unica. □

Esempio 1.15. Dato lo spazio di Hilbert $H = \mathbb{R}^2$ e gli spazi

$$K = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$
$$K^\perp = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$

(K chiuso), vale la decomposizione $K \oplus K^\perp$. ✯

Esempio 1.16. Si consideri lo spazio ℓ^2 e il sottospazio c_{00}. Quale è il sottospazio ${c_{00}}^\perp$? Data una successione $x = (x_n) \in \ell^2$, tale successione è in ${c_{00}}^\perp$ se

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = 0$$

per ogni $y \in c_{00}$; in base alla densità di c_{00} in ℓ^2 si ha ${c_{00}}^\perp = \{0\}$. ✯

1.12 Il teorema di rappresentazione di Riesz

Passiamo ora a un teorema che riguarda i funzionali lineari e continui su spazi di Hilbert. Dato uno spazio di Hilbert H, ci si chiede se lo spazio duale $H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ è ancora uno spazio di Hilbert. Fissato un elemento $y \in H$, l'applicazione $x \mapsto (x, y)$ che va da H in $\mathbb{R}$ è lineare (grazie alla linearità del prodotto scalare) e continua, ossia

$$\|(x, y)\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

essendo y fissato in H); si deduce quindi che $x \mapsto (x, y)$ è un funzionale lineare e continuo, cioè un elemento dello spazio duale H'.

Teorema 1.6 (Teorema di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $L \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}) = H'$ esiste ed è unico l'elemento $y \in H$ tale che per ogni $x \in H$ si ha $L(x) = (x, y)$. Inoltre, vale l'uguaglianza $\|L\|_{H'} = \|y\|_H$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$N = \{x \in H \text{ tale che } L(x) = 0\}$$

cioè il nucleo del funzionale lineare L. Sicuramente $N \neq \emptyset$ perché almeno 0 appartiene a N. N è un sottospazio chiuso di H; se infatti $x_n \to x \in H$ e $x_n \in N$ per ogni n, risulta

$$L(x) = \lim_{n \to \infty} L(x_n) = 0.$$

Se $N \equiv H$, L è il funzionale nullo, quindi scegliendo $y = 0$ la tesi del teorema è immediatamente dimostrata. Se invece $N \subset H$ con N non coincidente con H, esiste un elemento $z \neq 0$ appartenente a $N^{\perp}$. Cerchiamo ora un elemento y della forma λz, con λ scalare scelto in modo che sia

$$L(x) = (x, \lambda z) \tag{1.21}$$

per ogni $x \in H$. Riscriviamo (1.21) come

$$\frac{L(x)(z,z)}{\|z\|^2} = \lambda(x,z)$$

cioè

$$\frac{L(x)(z,z)}{\|z\|^2} - \lambda(x,z) = 0. \tag{1.22}$$

Come possiamo scegliere λ? È sufficiente che sia

$$\frac{L(x)}{\|z\|^2}\, z - \lambda x \in N$$

per ogni x, dato che $z \in N^{\perp}$; occorre dunque che

$$L\left(\frac{L(x)}{\|z\|^2}\, z - \lambda x\right) = 0.$$

Per la linearità di L si ha che

$$\frac{L(x)}{\|z\|^2} L(z) - \lambda L(x) = 0$$

e dunque

$$\lambda = \frac{L(z)}{\|z\|^2};$$

un tale λ soddisfa l'uguaglianza (1.22) per ogni x; l'elemento

$$y = \frac{L(z)}{\|z\|^2} z$$

verifica allora la proprietà

$$L(x) = (x, y) \quad \text{per ogni } x \in H. \tag{1.23}$$

Dimostriamo ora l'unicità; siano per assurdo y_1 e y_2 verificanti entrambi la condizione (1.23), cioè

$$L(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$$

per ogni $x \in H$; allora da

$$(x, y_1) = (x, y_2)$$

segue

$$(x, y_1 - y_2) = 0 \quad \text{per ogni } x \in H.$$

Scelto $x = y_1 - y_2$ si ha $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$ e quindi $y_1 = y_2$.
Proviamo infine che $\|L\|_{H'} = \|y\|_H$; si ha

$$\|L\|_{H'} = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{|L(x)|}{\|x\|_H} = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{|(x, y)|}{\|x\|_H} \leq \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{\|x\| \, \|y\|}{\|x\|} \leq \|y\|_H$$

e

$$\|y\|_H^2 = (y, y) = L(y) \leq \|L\|_{H'} \|y\|_H \, ,$$

quindi

$$\|y\|_H \leq \|L\|_{H'} \, ;$$

deduciamo in tal modo che $\|L\|_{H'} = \|y\|_H$, cioè la tesi. □

Osservazione 1.1. Sia $H = \ell^2$. Ogni funzionale L lineare e continuo si rappresenta nella forma

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

con $y = (y_1, y_2, \dots)$ fissato in ℓ^2.

Osservazione 1.2. Si consideri $L^2(B)$ con $B \subseteq A$, B insieme misurabile. Ogni funzionale L lineare e continuo su $L^2(B)$ si rappresenta nella forma

$$L(f) = \int_B f(x) g(x) dx$$

con g fissato in $L^2(B)$.

Osservazione 1.3. Il teorema di rappresentazione di Riesz definisce un operatore $R \colon H' \to H$ con $R(L) = y$ dotato delle seguenti proprietà:

- R è lineare: $R\big(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2\big)$ è l'elemento z che verifica la relazione

$$\begin{aligned}(x, z) &= \big(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2\big)(x) = \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) \\ &= \alpha_1 (x, y_1) + \alpha_2 (x, y_2) = (x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= \big(x, \alpha_1 R(L_1) + \alpha_2 R(L_2)\big).\end{aligned}$$

- R è continuo e in particolare conserva le norme, ossia

$$\|R(L)\|_H = \|L\|_{H'}\,;$$

- R è iniettivo perché $N(R)$ è costituito dal solo funzionale nullo;

- R è suriettivo perché, fissato $y \in H$, il funzionale $x \mapsto (x, y)$ è un elemento di H', cosicchè R è un isomorfismo isometrico tra H' e H. Questo si traduce in simboli come

$$(L_1, L_2)_{H'} : = \big(R(L_1), R(L_2)\big)_H.$$

Osservazione 1.4. Sussiste la decomposizione $H = N \oplus N^{\perp}$, con $\dim N^{\perp} = 1$.

CAPITOLO

2 Serie di Fourier

2.1 Serie di Fourier astratte

Definizione 2.1. Dato uno spazio di Hilbert H, un *sistema ortonormale* al più numerabile di H è una famiglia numerabile $\{x_n\}$ di vettori di H tale che

$$(x_n, x_m) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m. \end{cases}$$

☞ Un sistema ortonormale non contiene il vettore nullo dello spazio.

Definizione 2.2. Un sistema ortonormale $\{x_n\}$ di uno spazio di Hilbert H si definisce *completo* se la condizione

$$(x, x_n) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

implica necessariamente $x = 0$.

☞ In altre parole, un sistema ortonormale è completo se l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori del sistema è il vettore nullo.

Esempio 2.1. Una base ortonormale $(e_1, \dots, e_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è un sistema completo.
✯

Esempio 2.2. In ℓ^2 (spazio di dimensione infinita) si può considerare il sistema ortonormale completo $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dove e_j è la successione

$$(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$$

(l'elemento 1 è in j-esima posizione) definita da

$$(e_j, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ 1 & \text{se } j = k. \end{cases}$$

★

Definizione 2.3. Sia H uno spazio di Hilbert e $x \in H$. Dato un sistema ortonormale $\{e_j\}$ in H, i numeri reali $\hat{x}_i = (x, e_j)$ al variare di j nell'insieme di indici, si dicono *coefficienti di Fourier* dell'elemento x rispetto al sistema ortonormale $\{e_j\}$.

☞ Se il sistema $\{e_j\}$ è completo e $x \neq 0$, allora necessariamente esiste almeno un coefficiente di Fourier non nullo.

Definizione 2.4. La serie formale

$$\sum_{j=1}^{\infty} \hat{x}_j e_j$$

in H si dice *serie di Fourier* dell'elemento x rispetto al sistema $\{e_j\}$.

Si pongono due quesiti: la serie converge in H? Se converge, converge all'elemento x? La risposta a entrambe le domande è affermativa e si giunge ad essa mediante il teorema di Fischer–Riesz.

2.2 Il teorema di Fischer–Riesz

Teorema 2.1 (Teorema di Fischer–Riesz)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo di H. Allora l'applicazione $\Lambda\colon H \to \ell^2$ che associa a $f \in H$ la successione definita da*

$$\big(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots\big)$$

è un isomorfismo isometrico, cioè è lineare, continua, iniettiva, suriettiva e conserva le norme, ossia

$$\|x\|_H = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^2\right)^{1/2} = \|\Lambda(x)\|_{\ell^2}\,.$$

☞ Il teorema di Fischer–Riesz continua a valere con ℓ^2 sostituito da $\mathbb{R}^n$ nel caso di uno spazio di dimensione finita, fissando una base canonica in H.

Per dimostrare il teorema di Fischer–Riesz sono necessari alcuni risultati preliminari.

Lemma 2.1. *Siano H uno spazio di Hilbert ed $\{e_n\}$ un sistema ortonormale di H; sia inoltre $x = (x_n) \in \ell^2$. Allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

converge in H.

Dimostrazione. È sufficiente provare la condizione di Cauchy sulle ridotte della serie, cioè

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j - \sum_{j=1}^{m} x_j e_j \right) \right\|_H^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0;$$

se infatti è $n > m$ si ha

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=m+1}^{n} x_j e_j \right\|_H^2 &= \left(\sum_{j=m+1}^{n} x_j e_j, \sum_{i=m+1}^{n} x_i e_i \right) \\ &= \sum_{i,j=m+1}^{n} x_i x_j (e_j, e_i) = \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$ □

Teorema 2.2 (Teorema della migliore approssimazione)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert, $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale di H e $f \in H$. Si ha allora che la successione $\hat{f}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $i \in \mathbb{N} \mapsto \hat{f}_i$ appartiene a ℓ^2. Si ha inoltre che per ogni $\mu = (\mu_i) \in \ell^2$*

$$0 \le \left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \varphi_i \right\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \left| \hat{f}_i \right|^2 \le \left\| f - \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \varphi_i \right\|_H^2 . \qquad (2.1)$$

Dimostrazione. Dimostriamo in primo luogo che la successione $\hat{f}$ appartiene a ℓ^2. Si ha per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $\mu = (\mu_i) \in \ell^2$

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varphi_i \right\|_H^2 = \left(f - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varphi_i , f - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \varphi_j \right)$$
$$= \|f\|_H^2 + \sum_{i,j=1}^{m} \mu_i \mu_j (\varphi_i, \varphi_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu_i (f, \varphi_j)$$
$$= \|f\|_H^2 + \sum_{i=1}^{m} |\mu_i|^2 - 2 \sum_{i=1}^{m} \mu_i \hat{f}_i$$
$$= \|f\|_H^2 - \sum_{i=1}^{m} \left|\hat{f}_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\left|\hat{f}_i\right|^2 + |\mu_i|^2 - 2\mu_i \hat{f}_i \right)$$
$$= \|f\|_H^2 - \sum_{i=1}^{m} \left|\hat{f}_i\right|^2 + \sum_{j=1}^{m} \left(\mu_i - \hat{f}_i \right)^2 \geq 0. \tag{2.2}$$

Se $\mu_i = \hat{f}_i$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\hat{f}_i\right|^2 \leq \|f\|_H^2 ;$$

questo significa che la successione delle ridotte di $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\hat{f}_i\right|^2$ è monotona e limitata, quindi tale serie converge. Risulta allora

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\hat{f}_i\right|^2$$

quindi $\hat{f} = \left\{\hat{f}_i\right\}$ appartiene a ℓ^2. Prendendo ora $\mu = \hat{f}$ nella (2.2) e passando al limite per $m \to \infty$, si trova l'uguaglianza in (2.1). Altrimenti, passando al limite in (2.2) per μ generico si ha facilmente la seconda disuguaglianza in (2.1). $\square$

Segue una conseguenza importante del teorema della migliore approssimazione.

Disuguaglianza di Bessel. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{\varphi_i\}$ un sistema ortonormale di H. Per ogni $f \in H$ si ha*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\hat{f}_i\right|^2 \leq \|f\|_H^2 .$$

Dimostrazione. Si applica il teorema della migliore approssimazione. □

Teorema 2.3. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{\varphi_i\}$ un sistema ortonormale di H. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) per ogni $f \in H$ si ha che

$$\|f\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\hat{f}_i\right|^2 = \left\|\hat{f}\right\|_{\ell^2}^2 \quad \textit{(uguaglianza di Bessel-Parseval)};$$

2) $\{\varphi_i\}$ è un sistema ortonormale completo di H;

3) per ogni $f \in H$ si ha

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \varphi_i;$$

4) per ogni $f, g \in H$

$$\big(f, g\big)_H = \big(\hat{f}, \hat{g}\big)_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \hat{g}_i \quad \textit{(identità di Parseval).}$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che 1) implica 2). Se $\hat{f}_i = 0$ per ogni i, allora $\hat{f} = 0$, quindi $\|f\|_{\ell^2}^2 = 0$ e per l'uguaglianza di Bessel si ha $\|f\|_H^2 = 0$, pertanto $f = 0$; dire che $\hat{f}_i = 0$ per ogni i implica $f = 0$ significa dire che il sistema ortonormale è completo, quindi si è dimostrata la 1).
Dimostriamo che 2) implica 3). Consideriamo

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \varphi_i \in H;$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha

$$(g, \varphi_j) = \hat{g}_j = \hat{f}_j.$$

Osserviamo che un sistema ortonormale $\{\varphi_i\}$ è completo se

$$(f, \varphi_i) = \hat{f}_i = 0 \quad \text{per ogni } i$$

implica $f = 0$, quindi se e solo se – date f e g – la relazione $\hat{f}_i = \hat{g}_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ implica $f = g$. Poiché per ipotesi il sistema è completo, si ha $f = g$ e quindi la tesi

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \varphi_i.$$

Dimostriamo che 3) implica 4). Per ogni $f, g \in H$ si ha

$$(f,g)_H = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \varphi_i, \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}_k \varphi_k \right)_H = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_i \hat{g}_k (\varphi_i, \varphi_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \hat{g}_i = (\hat{f}, \hat{g})_{\ell^2}.$$

Dimostriamo infine che 4) implica 1). Per ogni $f, g \in H$ si ha per ipotesi

$$(f,g)_H = (\hat{f}, \hat{g})_{\ell^2};$$

scegliendo $g = f$ si ha

$$\|f\|_H^2 = \left\| \hat{f} \right\|_{\ell^2}^2$$

e questo equivale ad affermare che per ogni $f \in H$

$$\|f\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \hat{f}_i \right|^2$$

cioè la 1). □

Segue ora la dimostrazione del Teorema 2.1 (di Fischer–Riesz).

Dimostrazione. Per comodità di notazione scriviamo $(\Lambda f)_i = \hat{f}_i$. Proviamo la suriettività di Λ; a tal fine, per ogni $\mu \in \ell^2$ cerchiamo un f tale che

$$(\Lambda f)_i = \mu_i \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Scelto

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \varphi_i$$

si ha

$$(f, \varphi_j) = \hat{f}_j = \mu_j$$

dunque

$$(\Lambda f)_i = \mu_i$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$, cosicché la suriettività è provata. Per provare l'iniettività deve aversi che, dati $f, g \in H$, la relazione $(\Lambda f)_i = (\Lambda g)_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ implica $f = g$; basta ricordare che per ipotesi $\{\varphi_i\}$ è un sistema ortonormale completo, cioè $\hat{f}_i = \hat{g}_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ per ottenere $f = g$. Infine, l'applicazione Λ conserva le norme perché vale l'uguaglianza di Bessel

$$\|f\|_H^2 = \left\| \hat{f} \right\|_{\ell^2}^2 = \|\Lambda(f)\|_{\ell^2}^2 . \qquad \square$$

2.3 Ortonormalizzazione

Definizione 2.5. Sia H uno spazio di Hilbert e S un sottoinsieme di H. Si definisce

$$\operatorname{span}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k x_k : a_k \in \mathbb{R}, x_k \in S \right\}$$

l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di S.

Definizione 2.6. Sia H uno spazio di Hilbert e S un sottoinsieme di H. S si dice *linearmente indipendente* se ogni suo sottoinsieme finito è costituito da elementi linearmente indipendenti.

Teorema 2.4 (Teorema di ortonormalizzazione di Schmidt)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ una famiglia numerabile di elementi linearmente indipendenti di H. Allora esiste un sistema ortonormale $w_1, \dots, w_k$ tale che*

1. $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

2. $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n, \dots\} = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n, \dots\}$.

Dimostrazione. Costruiamo un sistema ortogonale $\{y_n\}$ con

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_j)}{\|y_j\|^2} y_j \qquad \text{per } n \geq 1. \end{aligned}$$

Dimostriamo in primo luogo, per induzione, che

$$y_n \neq 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Si ha $y_1 \neq 0$ perché $x_1 \in \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ è un sistema linearmente indipendente. Supposto vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ che $y_n \neq 0$, se per assurdo fosse $y_{n+1} = 0$ dovrebbe aversi

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_j)}{\|y_j\|^2} y_j,$$

con y_j combinazione lineare degli x_j, ma questo è contro l'ipotesi di $\{x_k\}$ sistema linearmente indipendente; è così dimostrata la (2.3).
Dimostriamo adesso, sempre per induzione, che

$$(y_i, y_j) = 0 \qquad \text{se } i \neq j. \tag{2.4}$$

Si ha

$$(y_1, y_2) = \left(y_1, x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{\|y_2\|^2} y_1 \right) = (y_1, x_2) - (x_2, y_1) \frac{(y_1, y_1)}{\|y_1\|^2} = 0;$$

supposto vero che per ogni $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$ con $j \leq n, j \neq k$ si ha

$$(y_k, y_j) = 0$$

e allora risulta

$$\begin{aligned}
(y_k, y_{n+1}) &= \left(y_k, x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_j)}{\|y_j\|^2} y_j \right) \\
&= (y_k, x_{n+1}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_j)}{\|y_j\|^2} (y_k, y_j) \\
&= (y_k, x_{n+1}) - \frac{(x_{n+1}, y_k)}{\|y_k\|^2} (y_k, y_k) = 0
\end{aligned}$$

cosicché la (2.4), unita alla (2.3), dimostra che il sistema $\{y_k\}$ è ortogonale. Scegliendo

$$w_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$$

si ha $\|w_k\| = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\{w_k\}$ ortogonale, quindi il sistema $\{w_k\}$ è ortonormale.
Osserviamo infine che i vettori $y_j \, (j = 1, \ldots, n)$ sono combinazione lineare degli x_j per $j = 1, \ldots, n$ così come gli x_j sono ottenibili come combinazione lineare degli y_j, quindi

$$\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\} = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$$

e da ciò si deduce che anche

$$\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\} = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_k, \ldots\}. \qquad \square$$

Teorema 2.5. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{\varphi_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale in H. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è completo;*

2) $\overline{\operatorname{span}\{\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}\}} = H \qquad$ *(densità di* $\operatorname{span}\{\varphi_i\}$ *in* H*).*

Dimostrazione. Dimostriamo che 1) implica 2). La tesi richiede che per ogni $f \in H$ esiste una successione $f_n \in \mathrm{span}\{\varphi_i\}$ tale che $f_n \to f$ per $n \to \infty$. Dall'ipotesi di completezza del sistema $\{\varphi_i\}$ si può scrivere ogni funzione f come

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i \varphi_i;$$

poiché si ha

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k \varphi_k = \lim_{n\to\infty} f_n$$

e

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k \varphi_k \in \mathrm{span}\{\varphi_i\} \quad \text{per ogni } n$$

si deduce la 2).
Mostriamo che 2) implica 1). La tesi sancisce che per ogni $f \in H$ tale che $(f, \varphi_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f = 0$. Poiché $\overline{\mathrm{span}\{\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}\}} = H$ e un generico $x \in H$ può essere rappresentato come

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

con $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \in \mathrm{span}\{\varphi_i\}$, allora se $(f, \varphi_i) = 0$ per ogni i e dunque

$$\left(f, \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right) = 0,$$

passando al limite per $n \to \infty$ si ha – per la continuità del prodotto scalare – che

$$(f, x) = 0$$

e, dato che questo vale per ogni $x \in H$, si ottiene $f = 0$. □

Definizione 2.7. Sia X uno spazio normato. X si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme U di X numerabile e denso in X (cioè numerabile e tale che $\bar{U} = X$).

Esempio 2.3. ℓ^2 è uno spazio normato separabile; basta considerare

$$U = \{\text{combinazioni inebri finite di } e_n \text{ a coefficienti razionali}\},$$

dove $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ e l'elemento 1 occupa l'n-esima posizione. ✯

☞ Tutti gli spazi normati di dimensione finita sono separabili.

Proposizione 2.1. *Sia X uno spazio normato di dimensione infinita. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1) *X è separabile;*
2) *esiste $V \subset X$ numerabile tale che $\overline{\mathrm{span}(V)} = X$;*
3) *esiste $W \subset X$ numerabile e linearmente indipendente con la proprietà $\overline{\mathrm{span}(W)} = X$.*

Dimostrazione. È immediato osservare che 3) implica 2). D'altra parte, si dimostra facilmente che 2) implica 3) selezionando da V un sottoinsieme W linearmente indipendente.
Dimostriamo che 1) implica 2). Per ipotesi lo spazio X è separabile, quindi esiste un sottoinsieme U di X numerabile tale che $\overline{U} = X$. Posto

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots\}$$

sia $V = U$; allora

$$X = \overline{U} \subseteq \overline{\mathrm{span}(U)} = \overline{\mathrm{span}(V)} \subset X$$

quindi $\overline{\mathrm{span}(V)} = X$.
Dimostriamo che 2) implica 1). Cerchiamo $U \subset X$ numerabile e denso in X. Sia

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} q_i v_i \mid m \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}, v_i \in V \right\}$$

dove $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots\} \subset X$; l'insieme $\mathcal{H}$ è numerabile. □

Teorema 2.6. *Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. H ammette l'esistenza di un sistema ortonormale completo $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in H se e solo se H è separabile.*

Dimostrazione. La chiusura di $\mathrm{span}\{\varphi_n\}$ in H coincide con H, pertanto l'insieme $\mathrm{span}\{\varphi_n\}$ è denso in H, cioè H è separabile. Viceversa, se H è separabile esiste un sottoinsieme $S \subseteq H$ numerabile linearmente indipendente e denso in H tale che $\mathrm{span}(S) = H$. A partire da S, utilizzando il teorema di ortonormalizzazione, si può costruire un sistema ortonormale $\{\varphi_n\}$ che sarà necessariamente completo grazie alla densità di S. □

Esempio 2.4. Sia $L^p(\Omega)$ con Ω sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$:

- se $1 \leq p < +\infty$, l'insieme $L^p(\Omega)$ è separabile;
- se $p = +\infty$ l'insieme $L^p(\Omega)$ non è separabile. ✯

Esempio 2.5. Se K è un compatto di $\mathbb{R}^n$, lo spazio normato $C^0(K)$ è separabile. ✯

2.4 Serie trigonometriche

Introduciamo adesso degli importanti spazi che godono delle proprietà esposte nei precedenti paragrafi.

2.4.1 Gli spazi $L^p(\mathbb{T})$

Lo spazio funzionale $L^p(\mathbb{T})$ è costituito dalle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ misurabili, di periodo 2π e con $|f|^p$ integrabile in $(-\pi, \pi)$; in base alla periodicità di tali funzioni, è sufficiente che la funzione $|f|^p$ sia integrabile in un qualunque intervallo di lunghezza 2π.
Un altro spazio da tenere presente è $C^0(\mathbb{T})$, costituito dalle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue e periodiche di periodo 2π. Nello spazio $L^p(\mathbb{T})$ si introduce la norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

mentre in $C^0(\mathbb{T})$ si considera la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \, .$$

Gli spazi $L^p(\mathbb{T})$ e $C^0(\mathbb{T})$ sono spazi di Banach complessi. Lo spazio $L^2(\mathbb{T})$, in particolare, è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito da

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

Proposizione 2.2. *Valgono le seguenti inclusioni:*

- $C^0(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$*;*
- $L^p(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T})$ *se* $p > q$

con

- $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ *per ogni* $f \in C^0(\mathbb{T})$*;*

- $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ *per ogni* $f \in L^p(\mathbb{T})$, *se* $p > q$.

Dimostrazione. Se $f \in C^0(\mathbb{T})$, allora si ha $f \in L^p(\mathbb{T})$ per ogni p e vale (per la disuguaglianza di Hölder)

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty\, dt\right)^{1/p} = \|f\|_\infty .$$

Osserviamo poi che se $p > q$ vale l'inclusione $L^p(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T})$ quindi

$$\begin{aligned}\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} dt\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt\right)\sqrt{2\pi} = \|f\|_2 .\end{aligned}$$

$\square$

Proposizione 2.3. *Lo spazio* $C^0(\mathbb{T})$ *è denso in* $L^p(\mathbb{T})$ *per ogni* $p \in [1, +\infty)$.

Preso un qualunque elemento $f \in L^p(\mathbb{T})$ esiste una successione di funzioni $f_n \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{T})$. Lo spazio $L^2(\mathbb{T})$ è di Hilbert rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{L^2(\mathbb{T})}$.

2.4.2 Polinomi e serie trigonometriche

Ricordiamo innanzitutto la relazione di Eulero

$$e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt).$$

Sia data la famiglia $\left\{e^{ikt}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ delle funzioni a valori complessi periodiche di periodo 2π; sono funzioni appartenenti a $C^0(\mathbb{T})$ e quindi contenute in tutti gli $L^p(\mathbb{T})$. Si ha $\left|e^{ikt}\right| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{T})$ è dato proprio da queste funzioni:

$$\left(e^{ikt}, e^{int}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\overline{e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Un polinomio trigonometrico si rappresenta come

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}. \tag{2.5}$$

Definizione 2.8. Una *serie trigonometrica* è una serie di funzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

dove $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ si dice *successione dei coefficienti.*

La convergenza di una serie trigonometrica va intesa nel senso seguente: la serie trigonometrica converge in ... se la successione dei polinomi trigonometrici in (2.5) converge in ... per $n \to \infty$.
Data una funzione $f \in L^2(\mathbb{T})$, i coefficienti di Fourier di f sono dati da

$$\hat{f}_k = (f(t), e^{ikt}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

e la corrispondente serie di Fourier è

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{ik(t-s)}ds$$

(si può anche parlare di polinomi di Fourier per la f). Si ha inoltre

$$\left|f(t)e^{-ikt}\right| = |f(t)|$$

A norma delle relazioni di Eulero, una serie di Fourier $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikt}$si può scrivere come

$$\begin{aligned} a_0 + &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\left[\cos(kt) + i\sin(kt)\right] \\ = a_0 + &\sum_{k=1}^{+\infty}\left[(a_k + a_{-k})\cos(kt) + i(a_k - a_{-k})\sin(kt)\right] \end{aligned}$$

I polinomi trigonometrici si riscrivono allora come

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{A_k\cos(kt) + B_k\sin(kt)\}$$

dove $A_k = (a_k + a_{-k})$ e $B_k = i(a_k - a_{-k})$. La convergenza di una serie trigonometrica è quindi la convergenza della serie di seni e coseni con le ridotte appena scritte e i cui coefficienti sono dati da

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ A_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \\ B_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt \end{aligned}$$

2.4.3 Serie di seni e coseni

Data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, consideriamo le ridotte della serie trigonometrica

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \\ B_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt. \end{aligned}$$

Presentano qualche interesse i seguenti tre casi:

1. se f è a valori reali, i coefficienti di Fourier rispetto ai seni e ai coseni sono tutti reali;

2. se f è pari, si ottiene una serie di soli coseni;

3. se f è dispari, si ottiene una serie di soli seni.

2.4.4 Il nucleo di Dirichlet

Definizione 2.9. Siano date $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Si definisce *prodotto di convoluzione* delle funzioni f e g la funzione

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s)ds = \left(f, \overline{g(t-\cdot)}\right)$$

Se una delle due funzioni è un polinomio trigonometrico, ad esempio

$$p(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$$

il prodotto di convoluzione con una qualunque funzione f di $L^2(\mathbb{T})$ è ancora un polinomio trigonometrico; si ha infatti

$$\begin{aligned}(p * f)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)p(t-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik(t-s)}ds \\ &= \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-iks}ds = \sum_{k=-n}^{n} a_k \hat{f}_k e^{ikt}\end{aligned}$$

La funzione

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

si dice *nucleo di Dirichlet*. La successione

$$(D_n * f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_n e^{ikt}$$

fornisce i polinomi di Fourier di f. Ci chiediamo se tali polinomi convergono in $L^2(\mathbb{T})$ a f stessa, e a ciò si risponderà nel prossimo paragrafo.

2.4.5 Il nucleo di Fejér

La media aritmetica dei primi $n+1$ nuclei di Dirichlet

$$K_n = \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_n}{n+1}$$

si dice *nucleo di Fejér*. La convoluzione di K_n con f dà

$$\big(K_n * f\big) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}\big(D_j * f\big)\right)(t) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=-j}^{j}\hat{f}_k e^{ikt}\right).$$

Per il nucleo di Fejér valgono le seguenti proprietà:

1)

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}, \quad t \in \mathbb{R};$$

2)

$$K_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{se } t \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ n+1 & \text{se } t = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases};$$

3) $K_n \in C^\infty(\mathbb{R}),\ K_n(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;

4) $K_n(t) = K_n(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;

5) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$;

6) per $\vartheta \in (0, \pi)$ si ha

$$0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right)} \qquad \text{per ogni } t \in [\vartheta, \pi],$$

e dunque K_n tende a 0 uniformemente nell'insieme $[-\pi, -\vartheta] \cup [\vartheta, \pi]$.

Teorema 2.7. *Se $f \in C^0(\mathbb{T})$ allora $K_n * f$ tende a f in $C^0(\mathbb{T})$, cioè uniformemente.*

Dimostrazione. Scriviamo

$$\begin{aligned}(K_n * f)(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau)f(t-\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau)f(t)d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau)(f(t-\tau) - f(t))d\tau.\end{aligned}$$

Osserviamo che $K_n(s) = K_n(-s)$; e pertanto con cambio di variabile $\tau = -s$ si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_n(\tau)(f(t-\tau) - f(t))d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(s)(f(t+s) - f(t))ds;$$

scindiamo l'integrale, ottenendo

$$\begin{aligned}&(K_n * f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau)(f(t-\tau) - f(t))d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_n(\tau)(f(t-\tau) - f(t))d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\tau)(f(t-\tau) - f(t))d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\tau)\left(\frac{f(t+\tau) + f(t-\tau)}{2} - f(t)\right)d\tau.\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$|(K_n * f)(t) - f(t)| \leq I_n(\vartheta) + J_n(\vartheta) \qquad \text{per } \vartheta \in (0, \pi),$$

dove

$$I_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\vartheta} K_n(\tau)\left|\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)}{2} - f(t)\right| d\tau$$
$$J_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} K_n(\tau)\left|\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)}{2} - f(t)\right| d\tau.$$

Dato $\varepsilon > 0$, per l'uniforme continuità di f si trova $\vartheta \in (0,\pi)$ tale che $|\tau| \leq \vartheta$ implica

$$\left|\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)}{2} - f(t)\right| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Per l'ultima delle proprietà di K_n, dato ϑ si riesce a trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$

$$|K_n(\tau)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } \tau \in (\vartheta, \pi).$$

Abbiamo

$$0 \leq I_n(\vartheta) \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\vartheta} K_n(\tau)d\tau \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(\tau)d\tau = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau)d\tau = \varepsilon$$

dove l'ultima uguaglianza vale per la parità di K_n. Per quanto riguarda J_n, abbiamo

$$0 \leq J_n(\vartheta) \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \left|\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)}{2} - f(t)\right| d\tau$$

e

$$\begin{aligned}
J_n(\vartheta) &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} |f(t+\tau)-f(t)|\,d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} |f(t-\tau)-f(t)|\,d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\pi} |f(t+\tau)-f(t)|\,d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\pi} |f(t-\tau)-f(t)|\,d\tau \\
&= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_t^{t+\pi} |f(s)-f(t)|\,ds + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t} |f(s)-f(t)|\,ds \\
&= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} |f(s)-f(t)|\,ds \leq \varepsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(s)|\,ds + |f(t)|\right) \\
&\leq \varepsilon\left(\|f\|_1 + \|f\|_\infty\right) \leq 2\varepsilon\,\|f\|_\infty\,;
\end{aligned}$$

questo implica che

$$|(K_n * f)(t) - f(t)| \leq I_n(\vartheta) + J_n(\vartheta) \leq \varepsilon(1 + 2\,\|f\|_\infty)$$

e quindi $K_n * f \to f$ in $C^0(\mathbb{T})$. □

Corollario 2.1. *La famiglia dei polinomi trigonometrici è densa in $C^0(\mathbb{T})$ rispetto alla metrica di $C^0(\mathbb{T})$.*

Teorema 2.8. *La famiglia di funzioni $\left\{e^{ikt}\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$ costituisce un sistema ortonormale completo per lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{T})$.*

Dimostrazione. Il sistema ortonormale $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è completo se e solo se

$$\overline{\operatorname{span}(\{e^{ikt}\}_{i\in\mathbb{Z}})} = L^2(\mathbb{T}).$$

Per ogni $f \in L^2(\mathbb{T})$, dato $\varepsilon > 0$ occorre trovare una funzione

$$g \in \operatorname{span}\{e^{ikt}\}_{i\in\mathbb{Z}} \quad \text{tale che} \quad \|f-g\|_2 \leq \varepsilon.$$

Lo spazio $C^0(\mathbb{T})$ è denso in $L^2(\mathbb{T})$ a norma della Proposizione 2.3. Data $f \in L^2(\mathbb{T})$, troviamo una $h \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $\|f-h\|_2 \leq \varepsilon/2$. Ora, per questa $h \in C^0(\mathbb{T})$, servendoci del Teorema 2.7 troviamo un polinomio trigonometrico g tale che $\|h-g\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Poiché si ha

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty$$

per ogni $u \in C^0(\mathbb{T})$, si ricava facilmente

$$\|f-g\|_2 \leq \|f-h\|_2 + \|h-g\|_2 \leq \|f-h\|_2 + \|h-g\|_\infty \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Esempio 2.6. Sia $H = L^2(\mathbb{T})$. Il sistema $\{e^{ikt}\}$ è un sistema ortonormale completo, infatti ogni $f \in L^2(\mathbb{T})$ si può scrivere come somma della sua serie di Fourier rispetto al sistema $\{e^{ikt}\}$. Si ha

$$D_n * f = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}_j e_j \xrightarrow{n\to\infty} f$$

nel senso di $L^2(\mathbb{T})$. In modo analogo si può dimostrare che il sistema

$$\{1, \sin kt, \cos kt\}$$

è un sistema ortogonale e completo. ✯

Bibliografia

[1] Haim Brezis. *Analisi funzionale*. Liguori, 1986.

[2] G. Gilardi. *Analisi matematica di base*. McGraw-Hill, 2001.