Analisi Matematica I - 10/09/2025 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 2 per la funzione $f(x) = e^{\sin(x)}$.

A2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)+\ln(n)}{\cos(n)+\ln(2n)}$.

A3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(3/x^\alpha)}{\sin^2(2/x)}$ in funzione del parametro $\alpha > 0$.

A4. Sia $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \ln(x)$. Calcolarne le primitive.

A5. Sia $a_n = (-1)^n \sin(1/n)$ per $n > 0$. Studiare il comportamento delle serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Determinare per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{n^{1/4}\ln(n)+n^\alpha}{3\,n^{3/2}+1}$ converge.

A6. Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^x/x$. Calcolare i limiti agli estremi del dominio. Calcolare la derivata prima di f. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Tracciare un grafico qualitativo di f. Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva e trovarne l'immagine.

A7. Si consideri la successione definita da $\begin{cases} a_0 = \pi/4 \\ a_{n+1} = \sin(a_n)a_n. \end{cases}$

Dimostrare che $0 < a_n \le \pi/4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\{a_n\}$ è monotona decrescente. Dimostrare che esiste $\lambda \in (0,1)$ tale che $a_n \le \lambda^n a_0$ per ogni $n > 0$. Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

B1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La derivata della funzione $F(x) = \displaystyle\int_a^x \sin(f(t))\,dt$ è

$\boxed{\text{A}}$ $\sin(f(x))$. $\boxed{\text{B}}$ $\sin(f(x))f'(x)$. $\boxed{\text{C}}$ $\cos(f(x))f'(x)$. $\boxed{\text{D}}$ $\sin(f(x)) + f'(x)$.

B2. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione pari tale che $f(-1)f(1)f(0) < 0$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(-1) < 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(1) < 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(0) < 0$. $\boxed{\text{D}}$ nessuna delle percedenti.

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione convergente. Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1} - a_n)$

$\boxed{\text{A}}$ diverge a $+\infty$. $\boxed{\text{B}}$ converge. $\boxed{\text{C}}$ oscilla. $\boxed{\text{D}}$ diverge a $-\infty$.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^3 = -\infty$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Siano p e q i polinomi di Taylor di ordine 1 con centro x_p e x_q, dove $x_p \neq x_q$. Stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false, fornendo una dimostrazione o un contro-esempio:

- se f è convessa allora esiste un'unica intersezione tra p e q,
- se f' è strettamente monotona allora esiste un'unica intersezione tra p e q.

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$.

B7. Enunciare e dimostrare la condizione necessaria di convergenza per le serie.

Soluzioni dello scritto del 10/09/25

A1. $\boxed{1 + x + \frac{1}{2}x^2}$

A2. $\boxed{1}$ Successione è asintotica a $\dfrac{\ln(n)}{\ln(2n)} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(2) + \ln(n)} \sim 1.$

A3. $\boxed{+\infty \text{ se } 0 < \alpha < 2\ ,\ 3/4 \text{ se } \alpha = 2,\ 0 \text{ se } \alpha > 2.}$ Da $\sin z \sim z$ per $z \to 0$. Numeratore asintotico a $3x^{-\alpha}$. Denominatore asintotico a $\sim 4x^{-2}$.

A4. $\boxed{\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C}$ Per parti.

A5. $\boxed{\text{converge, diverge}}$

Sia ha $b_n = \sin(1/n)$ infinitesima e monotona decrescente in quanto $1/n$ decrescente e $\sin(z)$ crescente per $z \in (0, 1)$. La serie di a_n converge per il criterio di Leibniz.

Si ha $|a_n| = \sin(1/n) \sim 1/n$ quindi la serie di $|a_n|$ diverge.

$\boxed{\text{converge per } \alpha < 1/2}$ Serie a termini positivi. Denominatore $\sim 3n^{3/2}$. Spezzando il numeratore si trova la serie di $\ln(n)/n^{5/4}$ e la serie di $1/n^{3/2-\alpha}$. La prima converge per cfr. con l'armonica $1/n^\beta$ con $1 < \beta < 5/4$, la seconda converge per $\alpha < 1/2$.

A6. $\boxed{f'(x) = e^x(x-1)/x^2, \text{ min loc in } x_m = 1, \text{ immagine } (-\infty, 0) \cup [e, +\infty), \text{ non iniettiva, non suriettiva}}$

A7. Per induzione: $0 < \sin(a_n)a_n \leq \sin(a_n)\pi/4 < \pi/4$. Inoltre $a_{n+1} = \sin(a_n)a_n \leq a_n$. Si ha $\sin(a_n) \leq \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 < 1$ da cui $a_{n+1} \leq \lambda a_n$ per $\lambda = \sqrt{2}/2$. Per induzione $a_{n+1} \leq \lambda^n a_0$. Quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n a_0 = a_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n$ che converge (serie geometrica).

B1. $\boxed{\sin(f(x))}$

B2. $\boxed{f(0) < 0}$

B3. $\boxed{\text{converge}}$ serie telescopica

B4. Ad es. $a_n = -1/n^{1/3}$.

B5. falsa: $f(x) = x$ quindi $p(x) = q(x) = x$ con infinite intersezioni

vera: si ha $f'(x_p) < f'(x_q)$ quindi $p(x) = f'(x_p)(x - x_p) + f(x_p) = a_p x + b_p$ e $q(x) = f'(x_q)(x - x_q) + f(x_q) = a_q x + b_q$. Essendo $a_p \neq a_q$ l'intersezione è unica.