

B1. Sia $f(x) = \sin(e^x)$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora f è

- ☐ A limitata. ☐ B monotona. ☐ C pari. ☐ D dispari.

B2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $x_m \in [a, b]$ tale che

- ☐ A $f(x_m) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. ☐ B $f(x_m) \neq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.
☐ C $f(x_m) < f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. ☐ D $f(x_m) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell > 0$. Allora $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$

- ☐ A oscilla. ☐ B diverge a $-\infty$. ☐ C converge. ☐ D diverge a $+\infty$.

B4. Fornire una funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ • $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ • $f(a_n) > 0$ e $f(b_n) < 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

B5. Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monotona strettamente crescente e sia $x_0 \in (a, b)$. Stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false, fornendo una dimostrazione o un contro-esempio:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$.

B6. Fornire una definizione di $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.

COGNOME _____ NOME _____

☐ Matematica ☐ Fisica

A1. Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} \sinh^2(x) & x \leq 0 \\ \sin^\alpha(x) & x > 0. \end{cases}$ per $x \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori del parametro

$\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione sia continua

e di classe C^1 .

A2. Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{3(n+1)!}{(n-1)!} \right)}{\ln \left(\frac{n!}{(n-1)!} \right)}$.

A3. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(2x) + \cos(5x)}{\sinh(3x) + \sin(4x)}$.

A4. Calcolare $\int_0^1 \frac{2}{1 + \sqrt{x}} dx$ (con la sostituzione $t = \sqrt{x}$).

A5. Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{2n^3 - n \ln(n)}$.

Determinare per quali valori del parametro $z \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge.

A6. Sia $f : (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x \ln \left(\frac{x-2}{x+1} \right)$. Studiare il segno di f . Calcolare i limiti agli estremi del dominio. Calcolare la derivata prima di f .

A7. Si consideri la funzione parametrica $f_\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_\alpha(x) = \frac{1}{2}x^2 - \alpha x + 1$. Calcolare il punto di minimo $x_\alpha \in [0, +\infty)$ in funzione di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)$. Tracciare un grafico di g e stabilire se sia: monotona, continua, di classe C^1 e C^2 .

Soluzioni dello scritto del 23/07/25

A1. $\boxed{\alpha > 0 \text{ e } \alpha > 1}$ Si ha $f(x) \sim x^2$ per $x < 0$ e $f(x) = x^\alpha$ per $x > 0$.

A2. $\boxed{2}$ Successione $\sim \frac{\ln(3(n+1)n)}{\ln n} \rightarrow 2$.

A3. $\boxed{0}$ Numeratore $\sim \cosh(2x) \sim \frac{1}{2}e^{2x}$. Denominatore $\sim \sinh(3x) \sim \frac{1}{2}e^{3x}$.

A4. $\boxed{4(1 - \ln 2)}$ Per sostituzione si arriva a $\int_0^1 \frac{4t}{1+t} dt$. Si integra scrivendo $4t = 4(t+1) - 4$.

A5. $\boxed{\text{converge}}$ Si ha $\left| \frac{\cos(2n)}{2n^3 - n \ln(n)} \right| \leq \frac{1}{2n^3 - n \ln(n)} \sim \frac{1}{2n^3}$. La serie converge per convergenza assoluta e cfr. con una serie armonica generalizzata.

$\boxed{\text{converge per } -1 \leq z < 1}$ Per $|z| < 1$. Si ha $|z|^n/n \leq |z|^n$. La serie converge per convergenza assoluta e cfr. con la serie geometrica.

Per $z = 1$ si ha la serie armonica, che diverge. Per $z = -1$ si ha la serie di $(-1)^n/n$ che converge per Leibniz.

Per $|z| > 1$ la successione non è infinitesima e quindi la serie associata non può convergere.

A6. $f \leq 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -3, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, f'(x) = \ln \frac{x-2}{x+1} + \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$

Con de l'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-2}{x+1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{(x+1)(x-2)}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{(x-1)(x+2)} = -3.$$

Allo stesso modo per $x \rightarrow -\infty$.

Per $x \rightarrow -1^-$ si ha $\frac{x-2}{x+1} \rightarrow +\infty$. Quindi $x \ln \frac{x-2}{x+1} \rightarrow -\infty$.

Per $x \rightarrow 2^+$ si ha $\frac{x-2}{x+1} \rightarrow 0^+$. Quindi $x \ln \frac{x-2}{x+1} \rightarrow -\infty$.

A7. Essendo $x \in [0, +\infty)$ si ha

$$x_\alpha = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha < 0. \end{cases} \quad g(\alpha) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha^2 + 1 & \alpha \geq 0 \\ 1 & \alpha < 0. \end{cases}$$

Calcolando g' e g'' si vede che g è di classe C^1 ma non C^2 .

B1. $\boxed{\text{limitata}}$

B2. $\boxed{f(x_m) \leq f(x)}$

B3. $\boxed{+\infty}$

B4. Ad es. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, $a_n = (2n)\pi$, $b_n = (2n+1)\pi$.

B5. falsa: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ con $x_0 = 0$

vera: si ha $f(x) < f(x_0)$ per $x < x_0$, si conclude passando al limite per $x \rightarrow x_0^-$, notando che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ esiste finito per monotonia di f