Analisi Matematica I - 16/06/2025 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________

☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Si consideri la funzione $f(x) = \int_1^x e^{-2t^2}\,dt$ per $x \in \mathbb{R}$. Calcolarne il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 1$.

A2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \cos\big(\ln(1+2n^2)\big) + \ln\left(\frac{|\sin(n)|}{2n}\right)$.

A3. Calcolare $\lim_{x\to0^+} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(3x)}{\ln(1+x^2)}$.

A4. Calcolare $\int_0^1 \frac{3+2x}{1+x^2}\,dx$.

A5. Si consideri la successione $a_n = \sin(1/n^\alpha)\cos(1/n^\beta)$ per $\alpha, \beta > 0$. Studiare $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e il comportamento della serie $\sum_{n=5}^{+\infty} a_n$ in funzione dei parametri α e β.

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n n - 1}{1+2n^2}$.

A6. Sia $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \big(\ln(2-x) - 1\big)^2$. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Tracciare un grafico qualitativo di f. Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva e trovarne l'immagine.

A7. Determinare $b, c \in \mathbb{R}$ in modo tale che

- $\sin(1/x) \sim b/x$ per $x \to +\infty$
- $\sin(1/x) - b/x \sim c/x^3$ per $x \to +\infty$.

Calcolare $\int_{2/\pi}^{3/\pi} x^{-3} \sin(1/x)\,dx$.

B1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La sua immagine $f([a, b])$ è un intervallo della forma

$\boxed{\text{A}}$ (A, B). $\boxed{\text{B}}$ $[A, B)$. $\boxed{\text{C}}$ $[A, B]$. $\boxed{\text{D}}$ $(A, B]$.

B2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $x_0 \in (a, b)$. Allora $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \fint_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\, dx =$

$\boxed{\text{A}}$ $f(x_0)$. $\boxed{\text{B}}$ 0. $\boxed{\text{C}}$ $-\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$.

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora $\{a_n\}$ è

$\boxed{\text{A}}$ superiormente limitata. $\boxed{\text{B}}$ definitivamente limitata. $\boxed{\text{C}}$ limitata. $\boxed{\text{D}}$ inferiormente limitata.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che
• $\inf a_n = 0$ • $\sup a_n = 1$ • $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$.

B5. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e sia p il suo polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 \in (a, b)$. Stabilire se le seguenti implicazioni siano vere o false, fornendo una dimostrazione o un contro-esempio:

- se f è convessa allora p è convesso,
- se f è strettamente convessa allora p è strettamente convesso.

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Cauchy.

Soluzioni dello scritto del 16/06/25

A1. $\boxed{p(x) = e^{-2}(x-1) - 2e^{-2}(x-1)^2}$ Si ha $f(1) = 0$ e $f'(x) = e^{-2x^2}$ dal Teor. fondamentale del calcolo integrale.

A2. $\boxed{-\infty}$ La successione $\cos(\ln(1+2n^2))$ oscilla ma è limitata. Invece, $|\sin(n)|/2n \to 0^+$ e quindi $\ln(|\sin(n)|/2n) \to -\infty$.

A3. $\boxed{5.}$ Dalle espansioni, il numeratore è $5x^2 + o(x^2)$ mentre il denominatore è $\sim x^2$.

A4. $\boxed{\frac{3}{4}\pi + \ln 2}$

A5. $\boxed{\text{converge se } \alpha > 1 \text{ altrimenti diverge a } +\infty\text{, indipendentemente da } \beta}$ $1/n^\alpha \to 0^+$ e $1/n^\beta \to 0^+$, quindi $\cos(1/n^\beta) \to 1$ mentre $\sin(1/n^\alpha) \sim 1/n^\alpha$.

$\boxed{\text{converge}}$ la serie di $\dfrac{(-1)^n n}{1+n^2}$ converge per Leibniz, la serie di $1/(1+2n^2)$ converge per cfr. con l'armonica generalizzata.

A6. Punto di min assoluto in $2-e$. Immagine $[0, +\infty)$. Non iniettiva, non suriettiva.

A7. Da $\sin(z) = z - \frac{1}{6}z^3 + o(z^3)$ per $z \to 0$ con il cambio variabile $z = 1/x$ si ha $\sin(1/x) = (1/x) - \frac{1}{6}(1/x^3) + o(1/x^3)$ per $x \to +\infty$. $\displaystyle\int = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ per sostituzione $z = 1/x$ e poi per parti.

B1. $\boxed{[A, B]}$

B2. $\boxed{f(x_0)}$ Teorema media integrale

B3. $\boxed{\text{inferiormente limitata}}$

B4. Ad es. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_n = 1/2$ per $n \geq 2$

B5. vera: $p''(x) = p''(x_0) = f''(x_0) \geq 0$

falsa: controesempio $f(x) = x^4$ con $x_0 = 0$, si ha $p(x) \equiv 0$