Analisi Matematica I - 04/02/2025 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 1$ per la funzione

$f(x) = x\ln(3x) + 1$.

A2. Calcolare $\lim_{m\to+\infty} m^2 \sin(3/m)\cos(2/m)\arctan(-4/m)e^{3/m}$.

A3. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\int_1^x \ln(\sinh(s))\,ds$ in funzione del parametro $\alpha > 0$.

A4. Calcolare $\int_0^1 (2xe^{x^2})(x^2+3)\,dx$.

A5. Stabilire il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\big(\ln(n^2+2n+1) - \ln(n^2)\big)$.

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{3n^\alpha + 3n}{n^3\arctan(3n)}$ in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}e^{-x^2}\right)$. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Tracciare un grafico qualitativo di f. Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva e trovarne l'immagine.

A7. Si consideri la successione $a_m = 1/3^m$. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} A_n$ dove $A_n = \sum_{m=0}^{n} a_m$.

Sia $B_k = \sum_{m=k}^{2k} a_m$. Studiare $\lim_{k\to+\infty} B_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} B_k$.

B1. Sia $f(x) = |\ln(1+x)|$ per $|x| < 1$. Allora f è

$\boxed{\text{A}}$ limitata. $\boxed{\text{B}}$ monotona. $\boxed{\text{C}}$ continua. $\boxed{\text{D}}$ derivabile.

B2. Sia $a_n > 0$ tale che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 1/a_n$

$\boxed{\text{A}}$ converge. $\boxed{\text{B}}$ diverge a $+\infty$. $\boxed{\text{C}}$ oscilla. $\boxed{\text{D}}$ diverge a $-\infty$.

B3. Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx =$

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle 2\int_{a/2}^{b/2} g(2y)\,dy.$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle 2\int_{2a}^{2b} g(2y)\,dy.$ $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle \int_{a/2}^{b/2} g(2y)\,dy.$ $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} g(2y)\,dy.$

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che:

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$
- esistono due sottosuccessioni $\{a_{n_i}\}$ e $\{a_{n_j}\}$ tali che $a_{n_i} > 1$ e $a_{n_j} < 1$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$.

B5. Sia $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ strettamente crescente, convessa e di classe C^1. Sia $x_0 > 0$. Dimostrare che

- $\displaystyle\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0)$ per ogni $x > x_0$,
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

B6. Sia $\{a_n\}$ una successione. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema della derivata nulla.

Soluzioni dello scritto del 04/02/25

A1. $\boxed{(1+\ln 3)+(1+\ln 3)(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2}$

A2. $\boxed{-12}$ Espansioni: $\sin(z)\sim z$, $\cos(z)\sim 1$, $e^z\sim 1$ e $\arctan(z)\sim z$ per $z\to 0$.

A3. $\boxed{1/2 \text{ se } \alpha=2,\ +\infty \text{ se } \alpha<2 \text{ e } 0 \text{ se } \alpha>2.}$ de l'Hopital e Teor. fondamentale funzione intergale, poi $\ln(\sinh x)\sim \ln(\frac{1}{2}e^x)\sim x$.

A4. $\boxed{3e-2}$ Per parti. Primitiva $e^{x^2}(x^2+2)$

A5. $\boxed{\text{diverge}}$ Serie telescopica.

$\boxed{\text{Converge per } \alpha<2, \text{ altrimenti diverge a } +\infty.}$

Successione a termini positivi. Cfr. asintotico con serie armonica $a_n\sim cn^{\alpha-3}$ se $\alpha>1$. $a_n\sim cn^{-2}$ se $\alpha\le 1$.

A6. Punto di max assoluto in $x_0=0$. Dominio $(0,1]$.

A7. $A_k\to\sum_{m=0}^{+\infty}(\frac{1}{3})^m=3/2$. Fattorizzando $(\frac{1}{3})^k$ si ha $B_k=(\frac{1}{3})^kA_k$. Quindi $B_k\sim 3/2(\frac{1}{3})^k$. Di conseguenza $B_k\to 0$ e $\sum_{k=0}^{+\infty}B_k$ converge (serie geometrica).

B1. $\boxed{\text{continua}}$

B2. $\boxed{+\infty}$

B3. $\boxed{2\int_{a/2}^{b/2}\ ...}$ per sostituzione

B4. Ad es. $a_n=1+(-1)^n/(n+1)$

B5. Sia ha $f'>0$ (per monotonia di f) e f' monotona crescente (per convessità di f).

Per Lagrange si ha $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_l)$ dove $x_l\in(x_0,x)$, quindi $f'(x_l)\ge f'(x_0)$. Inoltre si ricava $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ dove $\lim_{x\to+\infty}f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=+\infty$ essendo $f'(x_0)>0$.