Analisi Matematica I - 21/01/2025 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 3\tan(\beta x) + 1 & x \geq 0 \\ \beta\cosh(3x) + \alpha\sinh(x) & x < 0. \end{cases}$

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia di classe C^1.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{[n! + n^3]\tanh(n+5)}{[5^n - (n+1)!]\ln(3n+2)}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-3x)(e^{3x}-1)}{\ln(\cos(2x))\, e^{-2x}}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{3\cos(x) - 8\cos^3(x)}{\cos^2(x)} \sin(x)\, dx$.

A5. Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(4n+2)}{n^2 + n(-1)^n + 4}$

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{n^4 \sin(n^{-\alpha})}{n^\alpha \cos(n^{-4})\arctan(n^3)}$ in funzione del parametro $\alpha \geq 0$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Tracciare un grafico qualitativo di f. Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva.

A7. Sia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3\,e^{-x}\cos(x/2) - 1$. Mostrare che f è invertibile e determinare l'immagine di f. Mostrare che esiste un unico $x_0 \in [0,\pi]$ tale che $f(x_0) = 0$.
Si considerino le successioni $a_m = f^{-1}(1/m)$ e $b_m = f^{-1}(-1/m)$ per $m > 0$. Calcolare (in funzione di x_0) $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} a_m$, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} b_m$ e $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m(b_m - a_m)}$.

B1. Sia $a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $a_n + b_n = o(b_n)$. $\boxed{\text{B}}$ $a_n + b_n \sim a_n$. $\boxed{\text{C}}$ $a_n + b_n \sim b_n$. $\boxed{\text{D}}$ $a_n + b_n = o(a_n)$.

B2. Sia $g(x) = e^{-|x|+1} - \arctan(x^2 - 1)$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora g è

$\boxed{\text{A}}$ limitata. $\boxed{\text{B}}$ suriettiva. $\boxed{\text{C}}$ pari. $\boxed{\text{D}}$ dispari.

B3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0^2 + h^2) - f(x_0^2)}{h}$

$\boxed{\text{A}}$ $= +\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $= -\infty$. $\boxed{\text{C}}$ non esiste. $\boxed{\text{D}}$ $= 0$.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che:

- $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$ e $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n = -1$,
- esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = 0$.

B5. Sia $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua con $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Si consideri $I(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$ per $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in [0, +\infty)$ tale che $I(x) \geq (1 - \varepsilon)(x - \bar{x})$ per $x \geq \bar{x}$.

B6. Fornire una definizione di $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L$ per $L \in \mathbb{R}$.

B7. Sia $\{a_n\}$ una successione; stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false (fornendo una dimostrazione o un controesempio).

(1) $\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ limitata,

(2) $\{a_n\}$ limitata $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente.

Soluzioni dello scritto del 21/01/25

A1. $\boxed{\beta = 1 \text{ e } \alpha = 3}$ Si ha $f(x) \sim 3\beta x + 1$ per $x > 0$ e $f(x) \sim \beta + \alpha x$ per $x < 0$.

A2. $\boxed{0}$ Espansioni. Numeratore $\sim n!$ Denominatore $\sim -(n+1)!\ln(3n)$.

A3. $\boxed{9/2}$ Espansioni. Numeratore $\sim -9x^2$. Denominatore: $\ln(1+z) \sim z$ e $\cos(y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^3)$ quindi $\ln(\cos(y)) \sim -\frac{1}{2}y^2 + o(y^3) \sim -\frac{1}{2}y^2$ con $y = 2x$.

A4. $\boxed{3\ln 2 - 3}$ Sostituzione $t = \cos(x)$.

A5. $\boxed{\text{converge}}$ Criterio convergenza assoluta. $|a_n| \sim \dfrac{\ln(n)}{n^2} < \dfrac{1}{n^b}$ definitivamente per $b < 2$.

$\boxed{\text{Converge per } \alpha > 5/2\text{, altrimenti diverge a } +\infty.}$

Successione a termini positivi. Per $\alpha > 0$. Numeratore $\sim n^{4-\alpha}$. Denominatore $\sim n^{\alpha}\pi/2$. Quindi la serie si comporta come l'armonica $\sum n^{4-2\alpha}$.

A6. Punti di max e min in $1 \pm \sqrt{2}$. Non suriettiva, non iniettiva.

A7. Si ha $f'(x) = -3\,e^{-x}[\cos(x/2) + \frac{1}{2}\sin(x/2)] < 0$ in $[0,\pi]$ quindi f strettamente decrescente con $f(0) = 2$ e $f(\pi) = -1$. Esistenza e unicità di x_0 dal Teor degli zeri. La monotonia di f implica che a_m è crescente e b_m decrescente. Quindi $a_m \to A$ e $b_m \to B$. Essendo $f(a_m) = 1/m$ e $f(b_m) = -1/m$ si ha $f(A) = f(B) = 0$ e quindi $A = B = x_0$. Inoltre $\dfrac{1}{m(b_m - a_m)} = -\frac{1}{2}\dfrac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} \to -\frac{1}{2}f'(x_0)$.

B1. $\boxed{a_n + b_n \sim b_n}$

B2. $\boxed{\text{limitata}}$

B3. $\boxed{0}$ da $\dfrac{f(x_0^2 + h^2) - f(x_0^2)}{h^2} \to f'(x_0^2)$

B4. ad es. $a_n = \sin(n)$

B5. Per $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x}$ t.c. $1 - \varepsilon < g(x) < 1 + \varepsilon$ per $x \geq \bar{x}$. Quindi $I(x) = \displaystyle\int_0^{\bar{x}} g(t)dt + \int_{\bar{x}}^{x} g(t)dt$. Si ha $\displaystyle\int_{\bar{x}}^{x} g(t)\,dt \geq (x - \bar{x})(1 - \varepsilon)$ mentre $\displaystyle\int_0^{\bar{x}} g(t)\,dt \geq 0$ perché $g \geq 0$.