Analisi Matematica I - 04/09/2024 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Sia $f(x) = \sinh(x + \ln(x))$ per $x > 0$. Calcolare il polinomio di Tayor di ordine 2 e centro $x_0 = 1$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^3+1) - (n^3-2)}{(-2)^n - \ln(n^2+2)}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{3-2t}{t(3-t)}\, dt$.

A4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x y^{1/3}\sin(y^{1/3})e^{y+1}\, dy}{x^{5/3}}$.

A5. Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n - n^\alpha}{n + n^\alpha}$ in funzione del parametro reale α.

Studiare per quali valori del parametro $b \geq 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n+1} b^n$ converge.

A6. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sin(\pi e^{-x})$. Calcolare i limiti agli estremi del dominio e la derivata prima. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Tracciare un grafico qualitativo di f.

A7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(0) = 0$. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $u'(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)\, ds$. Calcolare $u'(0)$ e $u''(0)$. Stabilire se $x_0 = 0$ sia un punto di minimo o massimo relativo. Stabilire se u sia di classe C^2.

B1. Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sia x_0 tale che $f'(x_0) > 0$.

$\boxed{\text{A}}$ Se $a > 0$ allora $f(x_1) - f(x_0) > 0$ per ogni $x_1 > x_0$.
$\boxed{\text{B}}$ Se $a > 0$ allora $f(x_1)f(x_0) > 0$ per ogni $x_1 > x_0$.
$\boxed{\text{C}}$ Se $a < 0$ allora $f(x_1)f(x_0) < 0$ per ogni $x_1 > x_0$.
$\boxed{\text{D}}$ Se $a < 0$ allora $f(x_1)f(x_0) > 0$ per ogni $x_1 > x_0$.

B2. Sia f di classe C^1 in un intorno di x_0 e tale che $f(x) = q + mx + o(x - x_0)$ per $q, m \in \mathbb{R}$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(x_0) = q$ e $f'(x_0) = m$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x_0) = q + mx_0$ e $f'(x_0) = m$.
$\boxed{\text{C}}$ $f(x_0) = q - mx_0$ e $f'(x_0) = -m$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x_0) = q$ e $f'(x_0) = -m$.

B3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e suriettiva. Allora f è

$\boxed{\text{A}}$ iniettiva. $\boxed{\text{B}}$ biunivoca. $\boxed{\text{C}}$ continua. $\boxed{\text{D}}$ derivabile.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ limitata e tale che $\limsup_{n\to+\infty} a_n > 0$, $\liminf_{n\to+\infty} a_n < 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverga a $+\infty$.

B5. Stabilire se la seguente affermazione sia vera o falso, fornendo una dimostrazione o un contro-esempio: siano $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ due successioni tali che $\alpha_n < 0$, $\beta_n < 0$ e $\alpha_n + \beta_n \to 0$, allora $\alpha_n \to 0$ e $\beta_n \to 0$.

B6. Fornire le definizioni di funzione continua in x_0 e di funzione derivabile in x_0.

B7. Studiare il rapporto tra continuità e derivabilità di una funzione, fornendo dimostrazioni, esempi e contro-esempi.

Soluzioni dello scritto del 04/09/24

A1. $\boxed{y = \sinh(1) + 2\cosh(1)(x-1) + \frac{1}{2}[4\sinh(1) - \cosh(1)](x-1)^2}$

A2. $\boxed{0}$ il numeratore è asinotico a n^3, il denominatore a $(-1)^n\, 2^n$.

A3. $\boxed{0}$ primitiva $\ln(3t - t^2)$

A4. $\boxed{\frac{3}{5}e}$ con de l'Hopital si ottiene $\dfrac{x^{1/3}\sin(x^{1/3})e^{x+1}}{\frac{5}{3}x^{3/2}}$, quindi $\sin(z) \sim z$ etc.

A5. $\boxed{\alpha < 1 \text{ la serie diverge a } +\infty,\ \alpha = 1 \text{ la serie converge a } 0,\ \alpha > 1 \text{ la serie diverge a } -\infty.}$ Serie a temini positivi. La successione è asintotica a 1 se $\alpha < 1$ e a -1 se $\alpha > 1$, la succesisone è identicamente nulla per $\alpha = 1$.

$\boxed{\text{converge per } b < 1}$. Serie (a termini positivi) di $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1} b^n$. Si usa il criterio del confronto con la geometrica. Per $b \geq 1$ si ha $a_n \geq b^n$ e quindi la serie diverge. Per $b < 1$ si ha che definitivamente $a_n \leq c^n$ per $b < c < 1$ e quindi la serie converge.

A6. $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0}\sin(y) = 0$. Derivata prima $f'(x) = -\pi e^{-x}\cos(\pi e^{-x})$. Si noti che πe^{-x} assume valori in $(0,\pi]$ per $x \geq 0$. Quindi $f'(x) = 0$ se $\pi e^{-x} = \pi/2$ e quindi per $x = \ln 2$, $f'(x) > 0$ per $x < \ln 2$, $f'(x) < 0$ per $x > \ln 2$. In particolare, minimo assoluto in $x_0 = 0$ e massimo assoluto in $x_1 = \ln 2$.

A7. Per sostituzione si ha $u'(x_0) = 0$ e quindi $u''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \dfrac{u'(x) - u(x_0)}{x - x_0} = -\!\!\!\!\!\!\int_{x_0}^{x} f(s)\, ds \to f(x_0) > 0$ per il teorema della media integrale. Quindi x_0 è punto di max relativo. Essendo $u''(x) = f(x)$ si ha che u su classe C^2.

B1. $\boxed{f(x_1) > f(x_0)}$

B2. $\boxed{f(x_0) = q + mx_0,\quad f'(x_0) = m}$

B3. $\boxed{\text{continua}}$ essendo monotona esistono $\lim_{x\to x_o^{\pm}} f(x)$, se i limiti fossero diversi la funzione non sarebbe suriettiva.

B4. Ad es $a_n = \begin{cases} 2 & \text{per } n \text{ pari} \\ -1 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$.

B5. Si ha $\alpha_n + \beta_n < \alpha_n < 0$. Si ha $\alpha_n + \beta_n \to 0$ e quindi $\alpha_n \to 0$ per il teorema dei carabinieri. Si procede allo stesso modo per β_n.