

Laurea: ☐ Matematica ☐ Fisica

A1. Sia $f(x) = 2^x \log_2(x) + 1$ per $x > 0$. Calcolare la retta tangente al grafico in $x_0 = 1$.

A2. Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)n \sinh(n)}{\cosh(-n) - n \ln(n^2 + 1)}$.

A3. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x^2)}{x \cos^2(x)} + \frac{\tan^2(\sqrt{2}x)}{3 \sin(x^2)}$.

A4. Calcolare $\int 2(x+1) \ln(x) dx$.

A5. Stabilire se la serie $\sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^n (1 - e^{1/n})$ converge semplicemente e assolutamente.

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{2n(n+m)!}$ in funzione del parametro $m \in \mathbb{N}$.

A6. Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \left| \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} \right|$. Tracciare un grafico qualitativo di f , calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se la funzione è iniettiva e suriettiva, calcolare l'immagine di f .

A7. Sia $a_n = \tanh(n)$ e sia a_{n_j} la sottosuccessione per $n_j = 3j + (-1)^j$ con $j \geq 1$. Sia $s_k = \sum_{j=1}^k a_{n_j}$.

Calcolare $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{n_j}$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k$. Studiare il comportamento della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{s_k}$.

B1. Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e pari. Allora $\int_{-1}^1 f(x) + f(-x) dx =$

☐ A $\int_0^1 f(x) dx.$ ☐ B $2 \int_0^1 f(x) dx.$ ☐ C $4 \int_0^1 f(x) dx.$ ☐ D $3 \int_0^1 f(x) dx.$

B2. Sia $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \log_{1/3}(x^4) + ax + 1$. Stabilire per quale scelta del parametro a la funzione è crescente:

☐ A $1/\ln 3.$ ☐ B $2/\ln 3.$ ☐ C $3/\ln 3.$ ☐ D $4/\ln 3.$

B3. Siano $\{x_n\}$ una successione e $x \in \mathbb{R}$. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - x)$ converge allora

☐ A $x_n \rightarrow x^+.$ ☐ B $x_n \rightarrow x.$ ☐ C $x_n \rightarrow x^-.$ ☐ D $x_n \not\rightarrow x.$

B4. Fornire un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ strettamente decrescente e biunivoca.

B5. Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua. Siano $g(t) = e^{-t} \int_0^t f(s) ds$ e $h(t) = e^{-t} f(t)$ per $t \in [0, +\infty)$. Dimostrare che

- $h(t) = g'(t) + g(t)$
- $g(t) \leq \int_0^t h(s) ds.$

B6. Fornire una definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L^+.$

B7. Fornire l'enunciato e la dimostrazione della condizione necessaria di convergenza delle serie.

Soluzioni dello scritto del 15/07/24

A1. $y = (2/\ln 2)(x - 1) + 1$

A2. $+\infty$

A3. $2/3$

A4. $(x^2 + 2x) \ln x - (\frac{1}{2}x^2 + 2x) + C$ per parti

A5. converge semplicemente Converge per Leibniz. Mentre $|1 - e^{1/n}| \sim 1/n$ dall'espansione di Taylor e quindi la serie dei moduli diverge per cfr. asintotico con la serie armonica.

diverge per $m = 0$ e converge per $m \geq 1$

Per $m = 0$ la serie è armonica.

Per $m > 0$ si ha $\frac{n!}{n(n+m)!} \sim 1/n^{1+m}$ la cui serie (armonica) converge.

A6. Tracciando il grafico di $g(x) = \frac{(x+1)}{(x-1)(x+2)}$ si vede che l'immagine è $[0, +\infty)$ con pto di min in $x_0 = -1$.

A7. Si ha $n_j \rightarrow +\infty$ e $a_n \rightarrow 1$, quindi $a_{n_j} \rightarrow 1$, la cui serie diverge a $+\infty$. Si ha s_k è monotona crescente e positiva. Quindi la serie $\sum (-1)^k/s_k$ converge per Leibniz.

B1. $4 \int$ per simmetria

B2. $4/\ln 3$ imponendo che la derivata prima sia positiva

B3. $x_n - x \rightarrow 0$ per condizione necessaria di convergenza della serie

B4. Ad es $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(x))$

B5. Dal teorema fondamentale per la funzione integrale si ha $g'(t) = -e^{-t} \int_0^t f(s) ds + e^{-t} f(t)$ da cui $g'(t) + g(t) = h(t)$.

Inoltre

$$g(t) = e^{-t} \int_0^t f(s) ds = \int_0^t e^{-t} f(s) ds \leq \int_0^t e^{-s} f(s) ds = \int_0^t h(s) ds$$