Analisi Matematica I - 14/06/2024 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 5x \sin(\pi/\sqrt{x+9}) + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0. \end{cases}$

Calcolare $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(2/n) - 1}{\ln(1 + 3/n^2)}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log_x(2x^2 + 1)$.

A4. Calcolare $\displaystyle 8\int_0^1 e^{2x}x^3\,dx$.

A5. Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \left|\cos\left(m\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(m\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^\alpha \ln(n) + 1}{(n+1)^2}$ in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sinh\left(x^{-1} + 2x\right)$. Tracciare un grafico qualitativo di f, calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se la funzione sia pari o dispari, iniettiva e suriettiva, calcolare l'immagine di f.

A7. Sia $C > 0$ e $\{x_k\}$ una successione tale che $|x_{k+1} - x_k| \leq C|x_k - x_{k-1}|$ per ogni $k \geq 1$. Mostrare che $|x_{k+1} - x_k| \leq C^k|x_1 - x_0|$ per ogni $k \geq 1$. Assumendo che $0 < C < 1$: studiare la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |x_{k+1} - x_k|$ e dimostrare che $\{x_k\}$ è un successione di Cauchy.

B1. Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente . Allora

$\boxed{\text{A}}$ f è iniettiva. $\boxed{\text{B}}$ f è suriettiva. $\boxed{\text{C}}$ f è superiormente limitata.
$\boxed{\text{D}}$ f è inferiormente limitata.

B2. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitate e integrabili. Sia $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \geq \tfrac{1}{2}\int_a^b f(x) + g(x)\,dx.$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x) + g(x)\,dx.$

$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \geq \int_a^b f(x) + g(x)\,dx.$ $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) + g(x)\,dx.$

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione convergente e sia $b_n = (-1)^n a_n$. Allora $\{b_n\}$ è

$\boxed{\text{A}}$ infinitesima. $\boxed{\text{B}}$ monotona. $\boxed{\text{C}}$ limitata. $\boxed{\text{D}}$ convergente.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : [0, +\infty) \to (0, 1)$ tale che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ sia convergente.

B5. Sia f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Mostrare che

$$f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big] = o\,(f(x) - f(x_0)) \text{ per } x \to x_0.$$

Stabilire se l'affermazione sia vera o falsa quando $f'(x_0) = 0$ (fornendo una dimostrazione o un contro-esempio).

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

B7. Fornire l'enunciato e la dimostrazione del Teorema fondamentale del calcolo.

Soluzioni dello scritto del 16/05/24

A1. $\boxed{f'_-(0) = 0,\ f'_+(0) = 5\sin(\pi/3)}$ rapporto incrementale per la derivata destra.

A2. $\boxed{-2/3}$ espansioni di Taylor di $\ln(1+x)$ e $\cos(x)$ per $x \sim 0$.

A3. $\boxed{2}$ cambio base per log e de l'Hopital

A4. $\boxed{e^3 + 3}$ due volte per parti

A5. $\boxed{\text{diverge}}$ la successione è a termini positivi ma non esiste $\lim\limits_{n\to+\infty}$

$\boxed{\text{Converge per } \alpha < 1, \text{ altrimenti diverge a } +\infty.}$

Per $\alpha < 0$ la successione è asintotica a $1/n^2$, la serie converge.

Per $\alpha = 0$ la successione è asintotica a $-\ln(n)/n^2$, la serie converge per cfr.

Per $\alpha > 0$ la successione è asintotica a $-\ln(n)/n^{2-\alpha}$, la serie diverge per cfr. se $\alpha \geq 1$, altrimenti converge

A6. Punto di max loc $x_M = -1/\sqrt{2}$ e min loc $x_m = 1/\sqrt{2}$. Immagine $(-\infty, \sinh(-2\sqrt{2})] \cup [\sinh(2\sqrt{2}, +\infty)$ non iniettiva, dispari.

A7. Per induzione $|x_{k+1} - x_k| \leq C^k |x_1 - x_0|$.

Quindi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| \leq |x_1 - x_0| \sum_{k=0}^{\infty} C^k$ converge con $C \in (0,1)$.

Si ha $\displaystyle|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq |x_1 - x_0| \sum_{k=n}^{m-1} C^k < \varepsilon$ per $n \gg 1$ per convergenza della serie associata.

B1. $\boxed{\text{superiormente limitata}}$

B2. $\boxed{\displaystyle\int h \geq \frac{1}{2} \int f + g}$ $\max\{f, g\} \geq f$ e $\max\{f, g\} \geq g$ da cui $2h \geq f + g$

B3. $\boxed{\text{limitata}}$ a_n limitata

B4. ad es $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

B5. def di o

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} - f'(x_0)\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \ \to\ 1 - \frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} = 0$$

Falso. Si avrebbe $f(x) - f(x_0) = o(f(x) - f(x_0))$, es $f(x) = x^2$ in $x_0 = 0$.