**Analisi Matematica I - 18/01/2024 - Tempo a disposizione: 3h**

**COGNOME** ______________________________ **NOME** ______________________________

**Laurea:** ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

**A1.** Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 5 per la funzione $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x^2)\cos(2x) + 1$.

**A2.** Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x 4\arctan(\cos(t^2))\,dt}{x^{-1}\sin(5x^2)}$

**A3.** Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!-(n-2)!}{(n+2)!-(n-1)!}$.

**A4.** Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\Big(2\ln(1+3x^2)+1\Big)\,dx$.

**A5.** Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n+1}{5n^3+2}$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=8}^{+\infty} \tanh(2n^5+1)\sin^2(1/n^\beta)n^5$ in funzione del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ .

**A6.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x^2+3}\right|$. Tracciare un grafico qualitativo di $f$, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva, calcolare l'immagine di $f$.

**A7.** Sia $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \tan(x)(x - \frac{\pi}{2})$.

Si consideri la funzione $\bar{g}(x) = \begin{cases} a & x = 0 \\ g(x) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ b & x = \pi/2. \end{cases}$. Determinare i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che $\bar{g}$ is continua in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Verificare che $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \bar{g}(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,dx$.

**B1.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona con $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(a)f(b) > 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(a)f(b) \leq 0$. $\boxed{\text{C}}$ $f(a)f(b) < 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f(a)f(b) \geq 0$.

**B2.** Sia $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} x \ln^b(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ e sia $B = \{b \in \mathbb{R} : f \text{ sia continua}\}$.
Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\sup B = +\infty$ e $\inf B = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $\sup B = +\infty$ e $\inf B = -\infty$.
$\boxed{\text{C}}$ $\sup B = 1$ e $\inf B = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $\sup B = 0$ e $\inf B = -\infty$.

**B3.** Sia $\{a_n\}$ strettamente crescente e tale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converga. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\text{segno}(a_n) = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $\text{segno}(a_n) = -1$. $\boxed{\text{C}}$ $\text{segno}(a_n)$ oscilla. $\boxed{\text{D}}$ $\text{segno}(a_n) = 0$.

**B4.** Fornire un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\limsup_{x\to+\infty} f(x) \neq \limsup_{n\to+\infty} f(n)$.

**B5.** Sia $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ e siano $\lambda, \eta > 0$. Stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false (fornendo una dimostrazione o un controesempio)

- $f \in C^1(x_0 - r, x_0 + r)$ allora $\displaystyle\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0 - \eta h)}{(\lambda + \eta)h} = f'(x_0)$,
- $f$ derivabile in $x_0$ allora $\displaystyle\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0 - \eta h)}{(\lambda + \eta)h} = f'(x_0)$.

**B6.** Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ per $\ell \in \mathbb{R}$.

**B7.** Fornire l'enunciato e la dimostrazione del teorema della media integrale.

# Soluzioni dello scritto del 18/01/24

**A1.** $\boxed{1+\frac{1}{2}x^2-x^4}$ Dalle espansioni di sin e cos con la sostituzione di variabile.

**A2.** $\boxed{\pi/5}$ Si ha $x^{-1}\sin(5x^2)\sim 5x$. Quindi $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{5}\fint_0^x 4\arctan(\cos(x^2))\,dx=\frac{4}{5}\arctan(1)$ per il teoerma della media integrale.

Oppure con de l'Hopital si ottiene $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{4\arctan(\cos(x^2))}{-x^{-2}\sin(5x^2)+x^{-1}\cos(5x^2)10x}$. Dalle espansioni di sin e cos il denominatore è asintotico a 5.

**A3.** $\boxed{0}$ Scrivendo $(n+1)!=(n+1)n(n-1)(n-2)!$ si ha numeratore $=[(n+1)n(n-1)-1](n-2)!\sim n^3(n-2)!$

In modo analogo si ha denominatore $=[(n+2)(n+1)n-1](n-1)!\sim n^3(n-1)!=n^3(n-1)(n-2)!$

Il rapporto è asintotico a $1/n$.

**A4.** $\boxed{(\ln^2(4)+\ln(4))/6}$ Primitiva $\frac{1}{6}\ln^2(1+3x^2)+\frac{1}{6}\ln(1+3x^2)$

**A5.** $\boxed{\text{Converge}}$ Per il criterio del confronto con la serie di $1/5n^3$ oppure spezzando il numeratore e usando Leibniz e il criterio del confronto.

$\boxed{\text{Converge per } \beta>3\text{, diverge per } \beta\le 3}$. Si ha $\tanh(2n^5+1)\sim 1$. La serie è a termini positivi.

Per $\beta>0$ si ha $\sin^2(1/n^\beta)\sim 1/n^{2\beta}$. La serie e si comporta come la serie armonica di $1/n^{2\beta-5}$.

Per $\beta=0$. La serie si comporta come la serie armonica di $n^5$ e quindi diverge.

Per $\beta<0$ il limite della successione $\tanh(2n^5+1)\sin^2(1/n^\beta)n^5$ non esiste. Essendo la serie a termini positivi, la serie diverge per la condizione necessaria di convergenza.

**A6.** Punto di max globale in $-1$, di min globale in 1 e punto di max locale in 3. L'immagine è $[0,1/2]$. La funzione non è iniettiva e non è suriettiva (conviene tracciare prima il grafico di $g(x)=(x-1)/(x^2+3)$).

**A7.** Si ha $a=\lim_{x\to 0^+}g(x)=0$ mentre $b=\lim_{x\to(\pi/2)^-}g(x)=-1$, ad esempio usando de l'Hopital per la funzione $\sin(x)(x-\frac{\pi}{2})/\cos(x)$. La funzione $\bar{g}$ è continua e quindi integrabile. Integrando per parti si ottiene $\int_0^t\bar{g}(x)\,dx=[-\ln(\cos(x))(x-\frac{\pi}{2})]_0^t+\int_0^t\ln(\cos(x))\,dx$. Si conclude calcolando il limite del primo termine.

**B1.** $\boxed{f(a)f(b)\le 0}$

**B2.** $\boxed{B=(-\infty,+\infty)}$ in quanto $\lim_{x\to 0^+}x\ln^b(x)=0$ per ogni $b\in\mathbb{R}$.

**B3.** $\boxed{\text{segno} = -1}$ la successione è infinitesima e strettamente crescente, quindi a termini strettamente negativi.

**B4.** Ad es. $f(x)=\sin(2\pi x)$. Si ha $\limsup_{x\to+\infty}f(x)=1$ mentre $f(n)=0$ per $n\in\mathbb{N}$ e quindi $\limsup_{n\to+\infty}f(n)=0$.

**B5.** Prima affermazione vera per il teorema di Lagrange.

Seconda affermazione vera. Sommando e sottraendo $f(x_0)$ al numeratore si ha

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{(\lambda+\eta)h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda h}\frac{\lambda}{\lambda+\eta}=f'(x_0)\frac{\lambda}{\lambda+\eta}$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)-f(x_0-\eta h)}{(\lambda+\eta)h}=-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0-\eta h)-f(x_0)}{-\eta h}\frac{-\eta}{\lambda+\eta}=f'(x_0)\frac{\eta}{\lambda+\eta}$$