Analisi Matematica I - 25/09/2023 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ____________________________ **NOME** ____________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 5 per la funzione $f(t) = \sin(2t^3)e^{2t}\cos^2(t)$.

A2. Calcolare

$\lim_{x\to 2^+} \tan(\pi/x)$ $\lim_{x\to 3^-} \tan(\pi/x)$ $\lim_{x\to +\infty} \tan(\pi/x)$.

A3. Si consideri la successione $s_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k/k!$ (per $n \in \mathbb{N}$). Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \ln(s_n)$.

A4. Calcolare $\int_0^{\sqrt{\pi/3}} z\sin^2(z^2)\cos(z^2)\,dz$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n!}$.

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin(1/n)}{n^\alpha + \cos(1/n)}$ in funzione del parametro $\alpha > 0$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x^2+4}\right)$. Tracciare un grafico qualitativo di f, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva, calcolare l'immagine di f.

A7. Sia $[x] = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$ la funzione parte intera di $x \in \mathbb{R}$. Si consideri la funzione $f(x) = (-1)^{[x]}[x]^{-1}$ per $x \in [1, +\infty)$. Tracciare un grafico qualitativo di f. Stabilire se f sia iniettiva e suriettiva e calcolarne l'immagine.

B1. Sia $f(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$. Allora $\lim_{x\to+\infty} xf(1/x) =$

$\boxed{\text{A}}$ 0. $\boxed{\text{B}}$ 1. $\boxed{\text{C}}$ $+\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $-\infty$.

B2. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ crescente e sia $b_n = f(1/n)$ per $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ b_n è crescente. $\boxed{\text{B}}$ b_n è decrescente. $\boxed{\text{C}}$ b_n diverge. $\boxed{\text{D}}$ b_n converge.

B3. Si considerino le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ con $0 \leq b_n \leq a_n$. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cos(n)$

$\boxed{\text{A}}$ converge. $\boxed{\text{B}}$ diverge a $+\infty$. $\boxed{\text{C}}$ diverge a $-\infty$. $\boxed{\text{D}}$ oscilla.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $⨍_a^b f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Calcolare $\lim_{h\to0^+} \frac{f(x_0 + h^{1/2}) - f(x_0)}{h^\alpha}$ in funzione di $\alpha > 0$.

B6. Fornire una definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

B7. Fornire l'enunciato e la dimostrazione della condizione necessaria di convergenza delle serie.

Soluzioni dello scritto del 25/09/23

A1. $\boxed{2t^3(1+2t+t^2)}$

A2. $\boxed{+\infty,\ \sqrt{3},\ 0}$

A3. $\boxed{2}$ La serie converge a e^2.

A4. $\boxed{\sqrt{3}/16}$

A5. $\boxed{\text{Converge}}$ Criterio del rapporto

$\boxed{\text{Converge per ogni } \alpha}$

Si ha $\sin(1/n) \approx 1/n$ mentre $n^\alpha + \cos(1/n) \approx n^\alpha$. Quindi la serie si comporta come la serie (armonica) di $1/n^{\alpha+1}$.

A6. Punto di max globale in 0. L'immagine è $[0, \sqrt{2}/2)$.

A7. Si ha $f(x) = (-1)^k/k$ per $x \in [k, k+1)$ con $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$. Quindi f non è né iniettiva né suriettiva.

L'immagine sarà quindi $\{(-1)^k/k \text{ per } k \in \mathbb{N},\ k \geq 1\}$.

B1. $\boxed{0}$ con il cambio di variabile $y = 1/x$

B2. $\boxed{\text{decrescente}}$ per composizione

B3. $\boxed{\text{converge}}$ per criterio di convergenza assoluta

B4. f costante

B5. Si riscrive $h^{1/2-\alpha}\dfrac{f(x_0+h^{1/2})-f(x_0)}{h^{1/2}}$. Si ha $\dfrac{f(x_0+h^{1/2})-f(x_0)}{h^{1/2}} \to f'(x_0)$. Quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h^{1/2})-f(x_0)}{h^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1/2 \\ f'(x_0) & \alpha = 1/2 \\ +\infty & \alpha > 1/2. \end{cases}$$