Analisi Matematica I - 18/07/2023 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = \pi/8$ per la funzione $f(x) = \ln(\sin(2x)) + 1$.

A2. Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita per ricorrenza da $\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n^3. \end{cases}$ Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ in funzione del parametro $\lambda \geq 0$.

A3. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+4x)\cos(3x)}{\sin(5x)e^{2x}}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x+2}\,dx$ (usando la sostituzione $t = e^x$).

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \sin^\alpha\left(\frac{\pi}{n^\beta+1}\right)$ in funzione dei parametri $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} n(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n}$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^x - 3x$. Tracciare un grafico qualitativo di f, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se esiste x_* tale che $f(x_*) < 0$. Calcolare infine immagine, sup ed inf di f.

A7. Si consideri una successione $\{x_n\}$ tale che $nx_n \to 0^+$. Sia f una funzione di classe $C^1(-1,1)$. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{x_n} f(t)\,dt$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{x_n} tf'(t)\,dt$.

B1. Sia $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ dove f è continua e $f > 0$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ non esistono nè un punto di minimo nè un punto di massimo.

$\boxed{\text{B}}$ esistono sia un punto di minimo che un punto di massimo.

$\boxed{\text{C}}$ esiste un punto di minimo ma non esiste un punto di massimo.

$\boxed{\text{D}}$ esiste un punto di massimo ma non esiste un punto di minimo.

B2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione infinitesima. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < 1/n$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, a_n < 1/n$.

$\boxed{\text{D}}$ $\exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, a_n < 1$.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, non-monotona e non-continua.

B5. Sia $f : (0, +\infty) \to [-2, 2]$ suriettiva e derivabile. Dimostrare che esistono $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ con $x_1 \neq x_2$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Dimostrare che esiste $x_3 \in (0, +\infty)$ tale che $f'(x_3) \neq 0$.

B6. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Fornire una definizione di continuità di f in x_0.

B7. Sia $\{a_n\}$ una successione. Stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false (fornendo una dimostrazione o un contro-esempio).

- se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora $a_n \to 0$.
- se $a_n \to 0$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

$\boxed{A1}$ $f'(x) = \dfrac{2\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$ $f''(x) = \dfrac{-4}{\operatorname{sen}^2(2x)}$ $f(x_0) = 1 + \ln(\sqrt{2}/2)$

$$P_2(x) = 1 + \ln(\sqrt{2}/2) + 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2$$

$\boxed{A2}$ $a_n = \lambda^{3^n}$ quindi $a_n \to \begin{cases} 0 & \lambda < 1 \\ 1 & \lambda = 1 \\ +\infty & \lambda > 1 \end{cases}$

$\boxed{A3}$ $\ln(1+4x) \sim 4x$ $\cos(3x) \sim 1$ $\operatorname{sen}(5x) \sim 5x$ $e^{2x} \sim 1$ quindi

$$\frac{\ln(1+4x)\cos(3x)}{\operatorname{sen}(5x)\, e^{2x}} \sim \frac{4}{5}$$

$\boxed{A4}$ $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x + 2}\, dx$ $t = e^x$ $dt = e^x dx$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{t+2}\,\frac{1}{t}\, dt = \int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\, dt$

$$= \Big[\ln t - \ln(t+2)\Big]_1^2 = \left[\ln\left(\frac{t}{t+2}\right)\right]_1^2 = \ln\frac{3}{2}$$

$\boxed{A5.\,I}$ $\operatorname{sen}(z) \sim z$ per $z \to 0$ $z = \dfrac{\pi}{n^\beta + 1} \sim \dfrac{\pi}{n^\beta} \to 0$

$0 \le \operatorname{sen}^\alpha\left(\dfrac{\pi}{n^\beta + 1}\right) \sim \dfrac{\pi^\alpha}{n^{\alpha\beta}}$ criterio cfr. $\sim$ $\Rightarrow$ serie $\begin{cases} \text{converge} & \alpha\beta > 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \alpha\beta \le 1 \end{cases}$

$\boxed{A5.\,II}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibniz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n = \lim_{k \to +\infty} s_k \qquad s_k = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n n$$

$\{a_n = (-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, \dots\}$

$\{s_n\} = \{-1, 1, -2, 2, -3, \dots\}$ quindi $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} s_n \nexists$

$\boxed{A6}$ $f'(x) = e^x - 3$

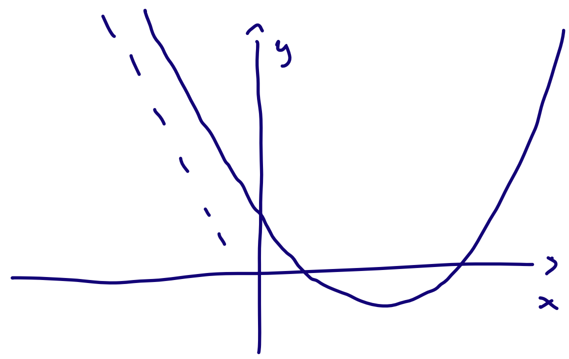
$$f'(x) \begin{cases} > 0 & x > \ln 3 \\ = 0 & x = \ln 3 \\ < 0 & x < \ln 3 \end{cases}$$

$x_0 = \ln 3$ pto di minimo (assoluto)

$f(x_0) = 3 - 3\ln 3 < 0$

$e^x - 3x \sim e^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$ $\quad$ $e^x - 3x \sim -3x \to +\infty$ per $x \to -\infty$

$\mathrm{Imm} = [3 - 3\ln 3, +\infty)$ $\quad$ $\inf f = \min = 3 - 3\ln 3$ $\quad$ $\sup = +\infty$



$\boxed{A7}$ $x_n \to 0^+$ $\quad$ $n\int_0^{x_n} f(t)\,dt = n x_n \int_0^{x_n} f(t)\,dt = n x_n f(x_n')$ per Teor media integr.

$0 \le x_n' \le x_n$

$$\underbrace{n x_n}_{\downarrow \atop 0} \underbrace{f(x_n')}_{\downarrow \atop f(0)} \to 0$$

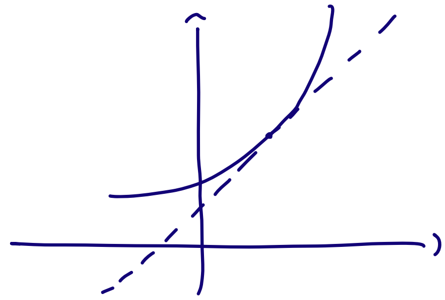
$$n\int_0^{x_n} t f'(t)\,dt = n \underbrace{\big[t f(t)\big]_0^{x_n}}_{n x_n f(x_n),\ n x_n \to 0,\ f(x_n) \to f(0)} - \overbrace{n\int_0^{x_n} f(t)\,dt}^{\to 0} \to 0$$

$\boxed{B1}$ $F(0)=0$ $F'(x)=f(x)>0$ F strett. crescente $\Rightarrow$

$x_0=0$ pto di min , $\nexists$ pto di max

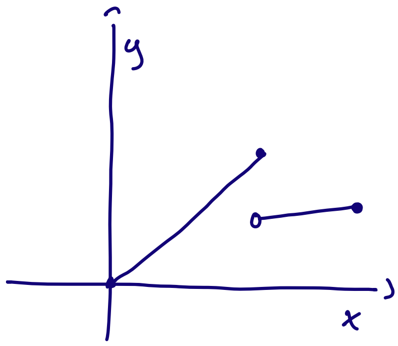
$\boxed{B2}$ $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=y$ eq. retta tangente

$f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ per convessità



$\boxed{B3}$ $a_n \to 0 \Rightarrow \exists n \,/\, a_n < 1$

$\boxed{B4}$



$\boxed{B5}$ $x_1 \,/\, f(x_1)=-2$ pto di minimo $\qquad$ $x_2 \,/\, f(x_2)=2$ pto di max

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$f'(x_1)=0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $f'(x_2)=0$

se $x_1<x_2$ per Teo Lagrange $\exists\, x_3 \in (x_1,x_2) \,/\, f'(x_3)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$

analogamente per $x_1>x_2$