

COGNOME _____ NOME _____

Laurea: ☐ Matematica ☐ Fisica

A1. Determinare i parametri α e β in modo tale che la funzione $f(x) = \begin{cases} \log_2(1 + 2x) + 1 & x \geq 0 \\ \beta x + \alpha & x < 0 \end{cases}$

sia di classes C^1 in $\mathbb{R}$.

A2. Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n! - n^2} + \frac{2^n - n^{1/3}}{\tanh(n+1) + \ln(n+1)}$.

A3. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x^2) - 3x^2 \cos(2x)}{x^4 - x^6}$

A4. Calcolare $\int_0^4 \frac{x}{e^x} dx$.

A5. Si consideri la successione $b_n = \frac{\cosh(n)}{e^n}$. Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n)^n$.

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=9}^{+\infty} \frac{3n^{1.3} + 3n^\lambda}{6n^\lambda - 3n^{0.7}}$ in funzione del parametro $\lambda > 0$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \left| \frac{x^2 + x - 6}{x - 1} \right|$. Tracciare un grafico qualitativo di f , indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di f .

A7. Si consideri la funzione $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(\ln x)$. Verificare se la funzione f sia superiormente limitata, inferiormente limitata, iniettiva, suriettiva e Lipschitziana. Verificare infine che $f(x) = o(\ln x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

B1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora

- ☐ **A** esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. ☐ **B** esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. ☐ **C** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.
☐ **D** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

B2. Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $I(x) = \int_x^a g(t) dt$ per $x \in [a, b]$. Se I è crescente allora

- ☐ **A** $g \leq 0$. ☐ **B** $g > 0$. ☐ **C** $g < 0$. ☐ **D** $g \geq 0$.

B3. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni di Cauchy e sia $\{\lambda_n\}$ una successione limitata. Allora la successione $c_n = \lambda_n a_n + b_n(\lambda_n - 1)$ è

- ☐ **A** monotona. ☐ **B** limitata. ☐ **C** convergente. ☐ **D** divergente.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converga
- esista una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_k}$ converga.

B5. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decrescente. Fornire la definizione di funzione monotona crescente e decrescente. Dimostrare che $g \circ f$ e $f \circ g$ sono decrescenti.

B6. Fornire una definizione di $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema della Media Integrale.

Soluzioni dello scritto del 27/06/23

A1. $\alpha = 1 \quad \beta = 2/\ln 2$

A2. $+\infty$ Il primo termine è asintotico a $\frac{(-1)^n}{n!}$ quindi è infinitesimo. Il secondo è asintotico a $\frac{2^n}{\ln(n)}$ quindi diverge.

A3. 6 Per le espansioni di cos e sin il numeratore è asintotico a $6x^4$. Il denominatore è asintotico a x^4 .

A4. $1 - 5e^{-4}$. Si integra per parti una volta.

A5. Converge. La successione b_n è asintotica a $1/2$ quindi la serie (geometrica) converge per il criterio del confronto.

$\text{Diverge per ogni } \lambda > 0$ Se $\lambda < 1.3$ il numeratore è asintotico a $3n^{1.3}$. Se $\lambda = 1.3$ il numeratore è asintotico a $6n^{1.3}$. Se $\lambda > 1.3$ il numeratore è asintotico a $3n^\lambda$.

Se $\lambda < 0.7$ il denominatore è asintotico a $-3n^{0.7}$. Se $\lambda = 0.7$ il denominatore è asintotico a $3n^{0.7}$. Se $\lambda > 0.7$ il denominatore è asintotico a $6n^\lambda$.

Combinando i casi, la successione (di cui si vuole calcolare la serie) diverge se $\lambda < 1.3$, converge a 1 se $\lambda = 1.3$ e converge a $1/2$ se $\lambda > 1.3$.

A6. Punti di min (angolosi) in -3 e in 2 . L'immagine è $[0, +\infty)$.

A7. La funzione è di classe C^1 con derivata $f'(x) = 1/x \ln(x)$. Calcolando i limiti agli estremi del dominio si vede che l'immagine è $\mathbb{R}$ dunque la funzione è suriettiva. La derivata è strettamente positiva dunque la funzione è strettamente crescente e quindi iniettiva. La derivata non è limitata e quindi la funzione non è lipschitziana. Per verificare che $f(x) = o(\ln(x))$ si scrive $\ln(\ln(x))/\ln(x) = \ln(y)/y \rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty$.

B1. C

B2. B usando il teorema fondamentale per la funzione integrale

B3. A Le successioni di Cauchy sono convergenti e quindi limitate.

B4. $a_n = 1/n$ se n è dispari e $a_n = 0$ se n è pari.

B5. Se $x_1 < x_2$ si ha $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ quindi $g \circ f(x_1) = g(y_1) \geq g(y_2) = g \circ f(x_2)$. Allo stesso modo nell'altro caso.