Analisi Matematica I - 20/02/2023 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ____________________________ **NOME** ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = e$ per $f(x) = \cos(\pi \ln(x)) + 1$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2} + \cos(n^{1/3} + 1)}{(-1)^n + n^{1/3} + 3}$

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right) + 2\cos\left(\frac{3}{x^2}\right)$

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4x+1} + \frac{1}{3x^2+1}\, dx$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1+4n^2}{n^5 + \ln(5n)}$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\lambda^n 5^\lambda}{2^n}$ in funzione del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

A6. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$

Tracciare un grafico qualitativo di g, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di g.

A7. Si consideri la successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definita da $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = \frac{1}{3}(3^{x_k} - 1). \end{cases}$

Dimostrare (per induzione) che la successione $\{x_k\}$ è positiva. Dimostrare (per induzione) che $\{x_k\}$ è decrescente. Dedurre che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} x_k = \ell$ e dimostrare che $\ell = 0$ (usando $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} x_k$).

B1. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile con f' positiva e crescente. Allora f è

$\boxed{\text{A}}$ crescente e convessa. $\boxed{\text{B}}$ decrescente e convessa. $\boxed{\text{C}}$ decrescente e concava.
$\boxed{\text{D}}$ crescente e concava.

B2. Sia $\{a_n\}_{n\mathbb{N}}$ una successione tale che $0 < a_n \le a_{n+1}/(n + 1)$. Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\boxed{\text{A}}$ converge. $\boxed{\text{B}}$ diverge a $+\infty$. $\boxed{\text{C}}$ diverge a $-\infty$. $\boxed{\text{D}}$ oscilla.

B3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\exists\, y \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \le y \;\forall\, x \in [a, b]$. $\boxed{\text{B}}$ $\forall y \in \mathbb{R} \;\exists!\, x \in [a, b] \,/\, f(x) \ge y$.
$\boxed{\text{C}}$ $\exists!\, y \in \mathbb{R} \,/\, f(x) > y \;\forall\, x \in [a, b]$. $\boxed{\text{D}}$ $\forall y \in \mathbb{R} \;\exists\, x \in [a, b] \,/\, f(x) = y$.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_k\}$ strettamente crescente e tale che $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converga.

B5. Fornire un esempio di funzione $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ limitata tale che non esista $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
Dimostrare che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/2} f(x) = 0$.

B6. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Fornire una definizione di $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} a_n$.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.

Soluzioni dello scritto del 20/02/23

A1. $\boxed{p_2(x) = \frac{1}{2}(\pi/e)^2(x-e)^2}$

A2. $\boxed{+\infty}$ La funzione è asintotica a $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ per $x \to +\infty$.

A3. $\boxed{5}$ Si ha $\sin(1/x) \sim 1/x$ e $\cos(1/x) \sim 1$ per $x \to +\infty$.

A4. $\boxed{\frac{1}{4}\ln 5 + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}).}$

A5. $\boxed{\text{Converge.}}$ La successione e è asintotica a $4/n^3$ la cui serie (armonica generalizzata) converge.

$\boxed{\text{Converge per } |\lambda| < 5, \text{ diverge per } \lambda \geq 5 \text{ e oscilla per } \lambda \leq -5.}$ Si riscrive la serie come $5^\lambda \sum_{n=5}^{+\infty} (\lambda/2)^2$. Si ha quindi una serie armonica

A6. Punto di max in $x_0 = 1$. L'immagine è $(0, 1]$.

Si consideri $g(z) = \arctan(z)/z$ per $z \neq 0$ (funzione pari). Si vede facilmente che $\lim_{z\to\pm\infty} g(z) = 0$ e che $g(z) > 0$. Si ha $\arctan(z) = z - \frac{1}{3}z^3 + o(z^4)$, quindi $g(z) \sim 1 - \frac{1}{3}z^2$ per $z \to 0$, di conseguenza $z = 0$ è un punto di max locale di g e $g'(0) = 0$. Per $z \neq 0$ si ha $g'(z) = (z/(1+z^2) - \arctan(z))/z^2 = \phi(z)/z^2$. Si ha $\phi(0) = 0$ e $\phi'(z) < 0$ per $z > 0$. Quindi $\phi(z) < 0$ per $z > 0$, da cui $g'(z) < 0$ per $z > 0$.

A7. Si ha $x_0 = 1$. Dimostrare che $x_k > 0 \Rightarrow x_{k+1} > 0$: essendo $x_k > 0$ si ha $3^{x_k} > 1$ e quindi $x_{k+1} = 3(3^{x_k} - 1) > 0$.

Si ha $1 = x_0 \geq x_1 = 2/3$. Dimostrare che $x_k \geq x_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} \geq x_{k+2}$: per monotonia della funzione esponenziale si ha $3^{x_k} \geq 3^{x_{k+1}}$ e quindi $(3^{x_k} - 1) \geq (3^{x_{k+1}} - 1)$, da cui $x_{k+1} \geq x_{k+2}$.

Si ha $\{x_k\}$ positiva e monotona, quindi $x_k \to \ell$ con $0 \leq \ell < 1 = x_0$. Passando al limite la formula di ricorrenza $3x_{k+1} = 3^{x_k} - 1$ si ha $3\ell = 3^\ell - 1$, quindi ℓ è l'ascissa di uno dei punti di intersezione tra il grafico di $f(\ell) = 3\ell$ e quello di $g(\ell) = 3^\ell - 1$. Di certo $g(0) = f(0)$ e dunque $\ell = 0$ è un punto di intersezione. (A questo punto può essere utile tracciare un grafico di f e g). Essendo $f'(0) > g'(0)$ si ha $f(\ell) > g(\ell)$ in un intorno destro di 0. Essendo $f(\ell) < g(\ell)$ per ℓ sufficientemente grande ci sarà un altro punto di intersezione $\ell^* > 0$ (non ci sono altri punti di intersezione essendo $g(\ell)$ strettamente convessa). Essendo $f(1) > g(1)$ si ha $\ell^* > 1$.

B1. $\boxed{\text{A}}$

B2. $\boxed{\text{B}}$ $a_n \to +\infty$

B3. $\boxed{\text{A}}$ Per continuità si ha $f([a, b]) = [A, B]$ ed y è un maggiorante.

B4. $a_k = -1/k^2$

B5. Es: $f(x) = \sin(1/x)$. Si ha $|f(x)| \leq c$ e quindi $-cx^{1/2} \leq x^{1/2}f(x) \leq cx^{1/2}$, si conclude per confronto (teorema dei Carabinieri).