Analisi Matematica I - 16/09/2022 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME e NOME ____

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Sia $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ per $x \in \mathbb{R}$. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \frac{\cos(n)+3n}{n^3-\ln(3n)-\sin(n^3)}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x} + \ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) - 1\right)$.

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta(\sin(n)+\pi)}$ in funzione del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

Studiareil comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{3^n + \ln n}$ in funzione del parametro $\alpha > 0$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{\ln 2}\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \tan(\pi e^{-x^2})$. Stabilire se la funzione sia continua, pari o dispari. Calcolare la derivata prima e tracciare un grafico qualitativo di f. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali) e l'immagine di f.

A7. Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \tanh(s^{1/2})\,ds$ per $x \in \mathbb{R}$. Stabilire se F sia pari, dispari, continua e derivabile. Calcolare F' e $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} F(x)$. Studiare i punti di massimo e minimo di F.

B1. Sia $a_n \to 1^-$ e $b_n \to 1^+$ allora

$\boxed{\text{A}}$ $a_n b_n$ diverge. $\boxed{\text{B}}$ $a_n b_n$ converge. $\boxed{\text{C}}$ $a_n b_n \to 1^+$. $\boxed{\text{D}}$ $a_n b_n \to 1^-$.

B2. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(a) < g(a)$. $\boxed{\text{B}}$ $f(b) > g(b)$. $\boxed{\text{C}}$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) \leq g(x)$.
$\boxed{\text{D}}$ $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

B3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. Allora
$\boxed{\text{A}}$ f è integrabile. $\boxed{\text{B}}$ f è derivabile e $f' \geq 0$. $\boxed{\text{C}}$ f è derivabile e $f' > 0$. $\boxed{\text{D}}$ f è continua.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge semplicemente.

Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che $f(-1) = -1$ e $f(0) = 0$. Mostrare che $f(x) \leq 0$ per $-1 < x < 0$ e che $f(x) \geq x$ per ogni $x > 0$.

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^+$.

B7. Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie.

Soluzioni dello scritto del 16/09/22

A1. $\boxed{p(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3}$ Usare l'espansione di $\sin(2z)$.

A2. $\boxed{3}$

A3. $\boxed{2}$ Con la sostituzione $t = 1/x$ si ottiene $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{e^t + \ln(1+t) - 1}{t}$. Si risolve con de l'Hopital o con le espansioni.

A4. $\boxed{\ln 2 + \frac{\pi}{3}.}$ Primitiva: $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan(x)$.

A5. $\boxed{\text{Converge per } \beta > 1 \text{ e altrimenti diverge.}}$ Si ha $\pi - 1 \le \sin(n) + \pi \le \pi + 1$ quindi per confronto la serie si comporta come la serie armonica.

$\boxed{\text{Converge per } 0 < \alpha < 3.}$ Asintotica alla serie geometrica.

A6. La funzione è continua e pari. Punto di max relativo in $x_0 = 0$. Immagine $\mathbb{R}$.

A7. La funzione è continua e derivabile per il Teorema della Funzione Integrale, in quanto $\tanh(\sqrt{s})$ è continua. Si ha $F'(x) = 2x\tanh(|x|)$. Minimo in $x_0 = 0$ in quanto $F(0) = 0$ e $F(x) \ge 0$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ in quanto $\tanh(\sqrt{s}) \to 1$ per $s \to +\infty$.

B1. $\boxed{\text{B}}$

B2. $\boxed{\text{C}}$

B3. $\boxed{\text{A}}$

B4. $a_n = 1/n$, $a_n = (-1)^n/n$, $a_n = 1/n^2$.

B5. Si ha $f(tx_1 + (1-t)x_0) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$ per $t \in [0,1]$. Per $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$ si ottiene $f(x_t) \le -(1-t) \le 0$ con $x_t \in [-1, 0]$ (si pensi anche all'interpretazione grafica della convessità).

Dalla caratterizzazione della convessita' con i rapporti incrementali si ha per $x > 0$

$$1 = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} \le \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$