Analisi Matematica I - 30/08/2022 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME e NOME ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Sia $f(x) = \begin{cases} \pi x + 1 & x > 0 \\ \alpha + e^{\beta x} & x \leq 0. \end{cases}$

Determinare α e β in modo tale che f sia di classe C^1.

A2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \cos\big(\log_3(n^{1/n})\big)$.

A3. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x}) - e^{\sqrt{x}}x}{x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\sin x}$.

A4. Calcolare $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{1+\tan^2(x)}{\tan(x)}\,dx$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1+n^\alpha+\cos^2 n}{n^2+\ln n}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=3}^{+\infty} 2\left(\frac{n-1}{2n}\right)^{n+2}$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = |x^4 - 2x^2|$. Stabilire se la funzione sia continua, pari o dispari. Calcolare la derivata prima e tracciare un grafico qualitativo di f. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali) e l'immagine di f.

A7.* Si consideri la successione $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_k = x_{k-1} + k^{-1} & \text{per } k > 0. \end{cases}$

Mostrare che $\{x_k\}$ è monotona e calcolare $\lim_{k\to+\infty} x_k$. Mostrare che per ogni $x \in [0,+\infty)$ esiste un unico $k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in [x_k, x_{k+1})$.

Si consideri la funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/(k+1)$ per $x \in [x_k, x_{k+1})$. Stabilire se f sia continua e limitata e tracciare un grafico di f. Calcolare $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

B1. Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell^-$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ la successione a_n è monotona. $\boxed{\text{B}}$ esiste una sotto-successione a_{n_k} monotona decrescente.
$\boxed{\text{C}}$ la successione a_n è definitivamente monotona.
$\boxed{\text{D}}$ esiste una sotto-successione a_{n_k} monotona crescente.

B2. Sia $f(x) = 1/x^3$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\boxed{\text{A}}$ f è continua e derivabile. $\boxed{\text{B}}$ f è continua ma non derivabile.
$\boxed{\text{C}}$ f non è continua ma è derivabile. $\boxed{\text{D}}$ f non è continua e non è derivabile.

B3. Sia a_n una successione a termini positivi e sia $b_n \sim a_n$. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora
$\boxed{\text{A}}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge. $\boxed{\text{B}}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ oscilla. $\boxed{\text{C}}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ diverge.
$\boxed{\text{D}}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ converge.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $f(0) = 1$.

B5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Dimostrare che esistono un punto di minimo $x_m \in [a, b]$ e un punto di massimo $x_M \in [a, b]$.

B6. Fornire una definizione di successione superiormente limitata.

B7. Enunciare e dimostrare il teorema di Cauchy.

Soluzioni dello scritto del 30/08/22

A1. $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = \pi}$ Usare l'espansione dell'esponenziale o calcolare $f(0)$ ed $f'(0)$.

A2. $\boxed{1}$ $\log_3(n)/n \to 0$

A3. $\boxed{-1/2}$ Al numeratore: i primi due temini dell'espansione del logaritmo e dell'esponenziale. Al denominatore: il primo termine dell'espansione del seno.

A4. $\boxed{\ln(\sqrt{3}).}$ Primitiva: $\ln(\tan(x))$.

A5. $\boxed{\text{Converge per } \alpha < 1 \text{ e altrimenti diverge.}}$ Se $\alpha \leq 0$ si maggiora con $\dfrac{1}{n^2 + \ln(n)} \sim 1/n^2$ la cui serie converge. Se $\alpha > 0$ la successione è asintotica a $1/n^{2-\alpha}$.

$\boxed{\text{Converge}}$ Usare il criterio della radice o il cfr. con la geometrica $(1/2)^n$.

A6. La funzione è continua e pari. Punti di minimo assoluto in $\pm\sqrt{2}$ e 0. Punti di massimo relaivo in ± 1.

A7. Si ha $x_k > x_{k-1}$. Inoltre $x_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k}$ e quindi $x_k \to +\infty$. La funzione è costante a tratti e discontinua per $0 < x \in \mathbb{N}$. Si ha $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

B1. $\boxed{\text{D}}$

B2. $\boxed{\text{A}}$

B3. $\boxed{\text{D}}$ per il criterio di convergenza assoluta

B4. $f(x) = 1$ se $x = 0$ e $f(x) = 0$ se $x \neq 0$.

B5. Si consideri f monotona crescente. In questo caso si ha $f(a) \leq f(x)$ per ogn $x \in [a, b]$ e quindi a è un punto di minimo mentre $f(x) \leq f(b)$ e quindi b è un punto di massimo. In modo analogo per la monotonia decrescente.