**Analisi Matematica I - 19/07/2021 - Tempo a disposizione: 3h**

**Matricola** ______________ **COGNOME e NOME** ______________________________

**Laurea:** ☐ **Matematica** ☐ **Fisica** **Orale:** ☐ **19/07**

**Note:** ______________________________

**A1.** Siano $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^{5/3})}{x^{2/3}} & x < 0 \\ a + bx & x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^{5/3})}{x^{2/3}} & x < 0 \\ c + x^d & x \geq 0. \end{cases}$

Determinare i parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in modo tale che $f$ e $g$ siano di classe $C^1$.

**A2.** Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sin(n) + 2^n}{n^{-2} - \sin(n^{-1})}$ .

**A3.** Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 1$ per la funzione $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

**A4.** Calcolare $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} x^3\, dx$ (utilizzare la sostituzione $x^2 = t$).

**A5.** Studiare il comportamento delle serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{\sin(n) + n^a}$ e $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} (\ln b)^{n+2} \tanh(b)$ in funzione dei parametri $a, b \in (0, +\infty)$.

**A6.** Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{\pi\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2}{x - \pi}\right)$. Tracciare un grafico qualitativo di $f$ indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di $f$.

**A7.**$^\star$ Dati $x \in (0, +\infty)$ e $b \in (0, +\infty)$ si consideri la successione

$$\begin{cases} a_0 = x \\ a_{n+1} = (a_n)^b. \end{cases}$$

Scrivere il termine $a_n$ della successione in funzione di $n$ (e dei parametri $x$ e $b$). Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$ in funzione di $x$ e $b$.

**B1.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa, allora $f$ è

$\boxed{\text{A}}$ monotona. $\boxed{\text{B}}$ derivabile. $\boxed{\text{C}}$ continua. $\boxed{\text{D}}$ invertibile.

**B2.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0$, allora $f'(x_0) =$

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 - x) + f(x_0)}{y}$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{-f(x) + f(x_0)}{-x + x_0}$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) + f(x_0 - h)}{h}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{-h}$.

**B3.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile con $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ esiste $c \in (a, b)$ tale che $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = 0$. $\boxed{\text{D}}$ per ogni $c \in (a, b)$ si ha $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$.

**B4.** Fornire un esempio di successione $b_n$ tale che $|b_n| \sim n^{-1/2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converga.

**B5.** Dimostrare la seguente implicazione.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(q) = f(0)$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$, allora $f$ è costante.

Stabilire se la seguente implicazione sia vera o falsa (fornendo una dimostrazione o un contro-esempio).
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(q) = f(0)$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$, allora $f$ è costante.

**B6.** Fornire una definizione di funzione continua.

**B7.** Enunciare e dimostrare il teorema di continuità delle funzioni derivabili.

## Soluzioni dello scritto del 19/07/21

### Parte A

**A1.** $\boxed{a = c = 0 \text{ e } b = d = 1.}$ In quanto $f(x) \sim g(x) \sim x$ per $x < 0$ usando $\sin(t) \sim t$ per $t \to 0$.

**A2.** $\boxed{-\infty.}$ Numeratore $\sim 2^n$. Denominatore $\sim -n^{-1}$ perché $\sin(1/n) \sim 1/n$ mentre $n^{-3} - n^{-1} \sim n^{-1}$.

**A3.** $\boxed{p_2(x) = p_1(x) = \ln(2) + (x-1).}$

**A4.** $\boxed{1/2 - e^{-1}.}$ Dopo la sistituzione si arriva a $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 e^{-t} t\, dt$ che si integra per parti.

**A5.** $\boxed{\text{Converge per } a > 1, \text{ diverge a } +\infty \text{ altrimenti.}}$ Successione $\sim 1/n^a$ (armonica).

$\boxed{\text{Oscilla per } 0 < b \le e^{-1}, \text{ converge per } e^{-1} < b < e, \text{ diverge a } +\infty \text{ per } b \ge e.}$
Serie si comporta come $\sum (\ln b)^n$ (geometrica).

**A6.** Max loc $x_0 = 0$. Min loc $x_1 = 2\pi$. Immagine $(-\pi/2, 0] \cup [\arctan(4\pi), \pi/2)$.

**A7.** $a_n = x^{(b^n)} = e^{b^n \ln x} = e^{c_n}$. Quindi possiamo studiare il lim di $c_n = b^n \ln x$. Da cui

- se $b \in (0,1)$ allora $b^n \to 0$, quindi $c_n \to 0$ e $a_n \to 1$.
- se $b = 1$ allora $b^n = 1$, quindi $c_n = \ln x$ e $a_n = x$,
- se $b > 1$ allora $b^n \to +\infty$ e quindi $c_n \to \begin{cases} -\infty & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$ e $a_n \to \begin{cases} 0^+ & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$

---

### Parte B (es. 1-5)

**B1.** $\boxed{\text{C}}$

**B2.** $\boxed{\text{B}}$

**B3.** $\boxed{\text{D}}$

**B4.** $b_n = (-1)^n n^{-1/2}$, la serie converge per il criterio di Leibniz.

**B5.** Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{q \to x_0} f(q) = f(0)$ per $q \in \mathbb{Q}$.
Falsa. La funzione di Dirichlet è un contro-esempio.