Analisi Matematica I - 14/06/2021 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola _______________ **COGNOME e NOME** ____

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica** **Orale:** ☐ **14/06** ☐ **19/07**

Note:

A1. Siano $a > 0$, $b > 1$ e $f(x) = \log_b\big(\cosh(x^a - 1)\big) + 1$ per $x > 0$. Calcolare $f'(x)$.

A2. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi 3\sin^2(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_0^\pi 3x\sin^2(x)\,dx$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3(e^{-3x} - 1) + 9x}{\ln(1 + 4x^2)}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)! - (n-1)!}{n^2 + n - 1}\right) - \ln\left(\frac{(n+1)! - (n)!}{n - 1}\right)$.

A5. Studiare il comportamento delle serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{e^{an+1}}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^b \ln(n)$ in funzione dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = |x|(x - 1)^{1/3}$. Tracciare un grafico qualitativo di f indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di f.

A7.* Sia $R : (0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$R(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x t\sin(1/t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt}.$$

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} R(x)$. Stabilire se R sia continua e limitata.

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e negativa e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decrescente e positiva, allora la funzione f/g è

$\boxed{\text{A}}$ decrescente e positiva. $\boxed{\text{B}}$ crescente e positiva. $\boxed{\text{C}}$ decrescente e negativa.
$\boxed{\text{D}}$ crescente e negativa.

B2. Sia a_n una successione. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$. Stabilire quale affermazione è corretta:

$\boxed{\text{A}}$ se la serie converge allora a_n è monotona. $\boxed{\text{B}}$ se a_n converge allora la serie converge.
$\boxed{\text{C}}$ se a_n è infinitesima allora la serie converge. $\boxed{\text{D}}$ se la serie converge allora a_n è infinitesima.

B3. Stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false:

- se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n - a_{n-1} = 0$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
- se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n - a_{n-1} = 0$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
- se $\lim_{n\to+\infty} a_n - a_{n-1} = 0$ allora esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

B4. Dimostrare la seguente affermazione: sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$, allora esiste $c > 0$ tale che $f(x) \geq c$ per ogni $x \in [0,1]$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente e suriettiva. Dimostrare che

- $f(x_1) < f(x_2)$ implica $x_1 < x_2$;
- dedurre che f^{-1} è strettamente crescente.

B6. Fornire la definizione di funzione Lipschitziana.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

Soluzioni dello scritto del 14/06/21

Parte A

A1. $\boxed{f'(x) = \tanh(x^a - 1)ax^{a-1}/\ln b.}$

A2. $\boxed{\frac{3}{2}\pi \text{ e } \frac{3}{4}\pi^2.}$ Utilizzare la formula di bisezione per riscrivere $\sin^2$ e l'integrazione per parti.

A3. $\boxed{27/8.}$ Usando le espansioni note per $x \to 0$ il numeratore è asintotico a $(27/2)x^2$, il denominatore a $4x^2$.

A4. $\boxed{-\infty.}$ Utilizzando la definizione ricorsiva del fattoriale $(n+1)! = (n+1)n!$ facendo varie semplificazioni algebriche si arriva a $\ln((n-1)/n^2)$.

A5. $\boxed{\text{Converge per } a > 0, \text{ diverge a } +\infty \text{ altrimenti.}}$ Scrivendo $e^{-an-1} = \lambda^n/e$ con $\lambda = e^{-a}$ la serie si comporta come la serie geometrica.

$\boxed{\text{Converge per } b < -1.}$ Si ha $n^b \ln(n) > n^b$ (definitivamente). Quindi per confronto la serie diverge se $b \geq -1$. Se $b < -1$ invece $n^b \ln(n) < n^c$ (definitivamente) quando $b < c < -1$, infatti $\ln(n) < n^{c-b}$ (definitivamente). Quindi per confronto la serie converge.

A6. Tracciare il grafico di $f(x) = x(x-1)^{1/3}$ e poi ribaltarlo per $x < 0$. Punto di minimo relativo in $3/4$. Punto di massimo relativo in 0. Immagine $\mathbb{R}$.

A7. Le funzioni $t\sin(1/t)$ e $\sin(t)/t$ sono continue in $(0, \pi/2]$ e ammettono limite destro nell'origine, quindi sono integrabili e possiamo utilizzare il Teorema di de l'Hopital per calcolare il limite, da cui

$$\lim_{x\to 0^+} R(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin(1/x)}{\sin(x)/x} = 0.$$

La funzione R è continua in $(0, \pi/2]$ e ammette limite per $x \to 0^+$, quindi è limitata.

Parte B (es. 1-5)

B1. $\boxed{\text{D}}$

B2. $\boxed{\text{C}}$ per condizione necessaria di convergenza della serie

B3. $\boxed{\text{V,F,F}}$

B4. Per il Teorema di Weierstrass esiste un punto di minimo, quindi $0 < f(x_{min}) \leq f(x)$ per ogni x. Da cui $c = f(x_{min})$.

B5. Per assurdo, se $x_1 \geq x_2$ si avrebbe $f(x_1) = f(x_2)$ (se $x_1 = x_2$) oppure $f(x_1) > f(x_2)$ (per monotonia se $x_1 > x_2$. Entrambi i casi danno un assurdo.

La funzione è invertibile in quanto iniettiva (per monotonia stretta) e suriettiva. Scrivendo $y_i = f(x_i)$ per $i = 1, 2$ e quindi $x_i = f^{-1}(y_i)$ l'implicazione precedente diventa: $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.