24-giugno-2011

Prova d'esame delle Trasformate Discrete+

- **Esercizio: 1-TD**

  Sia $f : (0, 2\pi) \to \mathbf{R}$ definita da $f(t) = t - 0.25$. Calcolare di coefficienti $c_0, c_1, c_{10}, c_{100}$ e c_{1000} della serie di Fourier. Riportare i grafici di $|c_n|$, $\mathrm{Re(c_n)}$ e $\mathrm{Im(c_n)}$ per $0 \leq n \leq 10$.

- **Esercizio: 2-TD**

  Sia $f : (0, 2\pi) \to \mathbf{R}$ definita da $f(t) = t^n - \lambda^n$, per $\lambda \in \mathbf{R}$. Sia $Y = \mathrm{fft(f)/N}$ il vettore dei coefficienti ottenuto con MATLAB. Determinare esplicitamente λ in modo tale che $Y(1) = 0$.

Prova d'esame di Ottimizzazione

- **Esercizio: 1-OT**

  Data la direzione di discesa $\mathbf{p}^{(k)}$, si scrivano i passi della struttura ricorsiva di un algoritmo per la ricerca lineare del passo basato sulla strategia di backtracking e sulla regola di Armijo.

- **Esercizio: 2-OT**

  1. Data $f \in C^2(\mathbf{R^n})$ sia $\mathbf{x}^{(k)}$ l'iterata k-esima; si scriva $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ottenuta applicando il metodo di Newton per la minimizzazione di f.
  2. Si consideri ora la funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\ x_2^2 - 2\ x_1 x_2 - 2\ x_1 + 2j$ di cui si vuole determinare $x^* = argmin f(\mathbf{x})$.
  3. A partire da una generica iterata $\mathbf{x}^{(k)}$ si applichi il metodi di Newton per la ricerca dei minimi di $f(\mathbf{x})$ e si determini esplicitamente l'iterata $\mathbf{x}^{(k+1)}$.
  4. Si confronti $\mathbf{x}^{(k+1)}$ con il punto stazionario di $f(\mathbf{x})$ e si commenti il risultato tenendo presente la struttura della funzione considerata.
  5. Calcolare il valore minimo $f(\mathbf{x}^*)$ per $j = 1$ e $j = 2$.

- **Esercizio: 3-OT**

  Si consideri la funzione

  $$\Phi(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x})]^2 = [x_1^2 + 2\ x_2^2 - 2\ x_1 x_2 - 2\ x_1 + 2j]^2$$

  per $j = 1$ e $j = 2$.

  Si utilizzi la function **fminunc** per trovare i minimi della funzione Φ sia nel caso $j = 1$ che $j = 2$. Si applichi il metodo Quasi-Newton *bfgs* con punto di partenza $\mathbf{x}_0 = (-2, 1.5)^T$. Si assegni nelle **options** che:

  - il tipo di problema non è LargeScale;

– si sceglie l'update *bfgs* ;
– la direzione iniziale è determinata prendendo la matrice di identità scalata come approssimante dell'Hessiana;
– si fornisce il gradiente;
– si assegnano le tolleranze: TolFun:1.e-10; TolX: 1.d-8.

Allegare il listato delle due prove ($j = 1$ e $j = 2$) oppure riportare le iterate con i seguenti dati:

iteration   Func-count $f(x)$ step-size   first-order condition

Dal calcolo esplicito dell'Hessiana nel punto di minimo si giustifichi l'efficienza del metodo, per $j = 1$ e $j = 2$, in termini di velocità di convergenza

Soluzioni

- **Esercizio: 1-OT**

  1. Sia $\mathbf{p}_k$ una di direzione di discesa, si scriva la struttura di un algoritmo per la ricerca lineare del passo basato sulla strategia di backtracking e sulla regola di Armijo.
     - $\alpha = 1$
     - $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_k + \alpha\ \mathbf{p}_k$
     - while $(f(\mathbf{x}_t)\ \geq\ f(\mathbf{x}_k + \rho\ \alpha\ (\nabla f(\mathbf{x}_k))^T \mathbf{p}_k)$
     - $\quad\alpha = 0.5\ \alpha$
     - $\quad\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_k + \alpha\ \mathbf{p}_k$
     - end
     - $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_t$
  2. Lo step di Newton è definito da

     $$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})\ \delta^{(k)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta^{(k)} \end{array} \right\}$$

     Sia $\mathbf{x}^*\ :\ \nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ con $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ é definita positiva, quindi $\mathbf{x}^*$ risulta un minimo relativo isolato, inoltre $f \in C^3(B*)$ oppure $f \in Cr(B^*)$ e $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ risulta Lipschitziana in $B^* = \mathbf{x} : ||\mathbf{x} - \mathbf{x}*|| < \rho$ allora la convergenza risulta quadratica. Se f é solamente in $C^2(B*)$ la convergenza risulta superlineare. Se $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ é singolare allora la convergenza é solo di tipo lineare.
  3. Condizioni necessarie: $\nabla\Phi(\mathbf{x}^*) = 0$ e $\nabla^2\Phi(\mathbf{x}^*)$ semidefinita positiva.
     Essendo $\nabla\Phi(\mathbf{x}) = 2f(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$, quindi $\mathbf{x}^*$ è punto stazionario per Φ se solo se : $f(\mathbf{x}^*) = 0$ oppure $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$.
     Inoltre si ha $\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = 2\nabla f(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})^T\ +\ f(\mathbf{x})\nabla^2 f(\mathbf{x})$.
     Se $\mathbf{x}^*\ :\ f(\mathbf{x}^*) = 0$ allora $\nabla^2\Phi(\mathbf{x}^*) = 2\nabla f(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)^T$ ed essendo $\mathbf{u}^T\nabla^2\Phi(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} = ||\nabla f(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{u}||^2\ \geq\ 0, \forall\mathbf{u}$ essa risulta sempre semidefinita positiva. Quindi ogni zero di $f(\mathbf{x})$ soddisfa le condizioni necessarie relative a Φ.
     Se $\mathbf{x}^*\ :\ \nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ allora $\nabla^2\Phi(\mathbf{x}^*) = 2f(\mathbf{x}^*)\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)^T$ per cui $\nabla^\Phi(\mathbf{x}^*)$ risulter'a semidefinita positiva:
     - se $f(\mathbf{x}^*) \geq 0$ e $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)^T$ è semidefinita positiva
     - se $f(\mathbf{x}^*) \leq 0$ e $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)^T$ è semidefinita negativa

- **Esercizio: 2-OT** Lo step di Newton è definito da

  $$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}\delta^{(k)} = -\nabla f(\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta^{(k)} \end{array} \right\}$$

  Esplicitando si ottiene

  $$\left(\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & 2\ c \end{array} \right) = -2 \left(\begin{array}{c} x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - 1 \\ cx_2^{(k)} - x_1^{(k)} \end{array} \right)$$

  Il gradiente è dato da $\nabla f(\mathbf{x}) = 2 \left(\begin{array}{c} x_1 - x_2 - 1 \\ cx_2 - x_1 \end{array} \right)$, quindi esiste solo un punto stazionario $\mathbf{x}^* = (\frac{c}{c-1}, \frac{1}{c-1})^T$ per $c \neq 1$.

L'Hessian è data da :$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = 4 \begin{pmatrix} .1 & -1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$ e la forma quadratica associata $\mathbf{u}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} = 4[u_1(u_1 - u_2) + u_2(-u_1 + cu_2)] = 4[u_1^2 - 2u_1u_2 + cu_2^2] = 4[(u_1 - u_2)^2 + u_2^2(c-1)]$ risulta $> 0 \forall \mathbf{u}$ se e solo se $c > 1$.

Oppure calcolo gli autovalori reali dell'Hessiana. $det \begin{pmatrix} .1-\lambda & -1 \\ -1 & c-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(c-\lambda) - 1 = 0$, e $\lambda^2 - (c+1)\lambda + (c+1) = 0$ da cui $\lambda^{\pm} = 0.5[(c+1) \pm \sqrt{(c+1)^2 - 4(c-1)}]$. Ora l'Hessiana risulta definita positiva quando $\lambda^- > 0$ quindi se $c + 1 > \sqrt{(c+1)^2 - 4(c-1)}$ da cui $c > 1$.

Riassumendo per $c > 1$ l'unico punto stazionario $\mathbf{x}^* = (\frac{c}{c-1}, \frac{1}{c-1})^T$ risulta essere il minimo assoluto di f ed il valore del minimo risulta dato da $f(\mathbf{x}^*) = \frac{-c}{c-1} + j\frac{c}{c-1}$. Quindi per j=1 $f(\mathbf{x}^*) = 0$ mentre per j=2 si ha $f(\mathbf{x}^*) = \frac{c}{c-1}$.

- **Esercizio: 3-OT**

  options = optimset('LargeScale','off','MaxFunEvals',250);

  options = optimset(options,'Display','iter','TolFun',1e-10,'TolX',1e-8,'GradObj','on');

  options=optimset(options,'HessUpdate','bfgs','InitialHessType','scaled-identity');

  disp(' Quasi -Newton : BFGS con gradiente ')

  [x,fval,exitflag,output] = fminunc(@pbnv-objfun,x0,options)

  function [f,grad] = pbnv-objfun(x)

  c=2;

  j=2;

  $phi = x(1)^2 + c * x(2)^2 - 2 * x(1) * x(2) - 2 * x(1) + j * c/(c-1);$

  f=phi*phi;

  grad(1)= phi *4*(x(1)-x(2)-1);

  grad(2)= phi*4*(c*x(2)- x(1));

  end