Analisi Matematica I - 22/02/2024 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=e^{5x}+1/x$. Calcolare $(f^{-1})'(e^5+1)$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n\sin(n)}{n^3+1}+\frac{n!+\ln(n)}{\cosh(-n)}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+2x}{\cos(x+x^3\ln(x))}+\frac{\ln(1+4x\sin(x))}{3x^2+2x^3}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\frac{1}{\cosh 2}\int_1^{\cosh 2}\cosh^{-1}(x)\,dx$.

A5. Stabilire il compotamento della serie $\displaystyle\sum_{n=12}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{3}{n^{1/2}}\right)$

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-\alpha^n}{1+\beta^n}$ in funzione dei parametri $\alpha,\beta\in[1,+\infty)$.

A6. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x}$. Tracciare un grafico qualitativo di f, calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva, calcolare l'immagine di f.

A7. Sia $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la funzione $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3(\cosh(x)-1)}{\sinh(x)} & x>0,\\ \alpha & x=0.\end{cases}$

Determinare il parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ in modo tale che g sia continua in $[0,+\infty)$. Con la scelta precedente di α calcolare $g'_+(0)$. Mostrare che l'insieme $\{x\in[0,+\infty):g(x)\geq x\}$ è limitato.

B1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x) - f(x_0)\,dx = 0.$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x) - f(x_0)\,dx > 0.$ $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x) - f(x_0)\,dx \neq 0.$

$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_a^b f(x) - f(x_0)\,dx < 0.$

B2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) \leq f(b).$ $\boxed{\text{B}}$ $f(x) \leq f(a).$ $\boxed{\text{C}}$ $f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}.$

$\boxed{\text{D}}$ $f(x) \leq \min\{f(a), f(b)\}.$

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione convergente e sia $s_k = \displaystyle\sum_{n=3}^{k} a_{n+1} - a_n$. Allora $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} s_k$

$\boxed{\text{A}}$ esiste finito. $\boxed{\text{B}}$ non esiste. $\boxed{\text{C}}$ $= +\infty.$ $\boxed{\text{D}}$ $= -\infty.$

B4. Fornire un esempio di funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strettamente monotona tale che $f(a)f(b) < 0$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

B5. Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e sia $A = \displaystyle\liminf_{n\to+\infty} a_n$. Stabilire se le seguenti affermazioni siano vere o false fornendo una dimostrazione o un controesempio.

- $\sup\{a_n\} \leq A$,
- $\inf\{a_n\} \leq A$.

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{x\to3^-} g(x) = 2$.

B7. Fornire l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Cauchy.

Soluzioni dello scritto del 22/02/24

A1. $\boxed{-1/(5e^5+1)}$ Formula della derivata della funzione inversa per $x = 1$.

A2. $\boxed{+\infty}$ Il primo termine è infinitesimo: $(-1)^n \sin(n)$ è limitata mentre $n^3+1 \to +\infty$. Si ha $n! + \ln(n) \sim n!$ mentre $\cosh(-n) = \cosh(n) \sim \frac{1}{2}e^n$. Quindi il secondo temine è asintotico a $2\,n!/e^n \to +\infty$.

A3. $\boxed{4/3}$ Il primo termine è infinitesimo perché $\cos(x + x^2\ln(x)) \to \cos(0) = 1$. Dalle espansioni $\ln(1+z) \sim z$ e quindi il secondo temine è asintotico a $4x\sin(x)/3x^2$.

A4. $\boxed{2 - \tanh 2}$ Graficamente $2\cosh 2 - \displaystyle\int_0^2 \cosh x\,dx$ oppure con la sostituzione $x = \cosh x$ e poi per parti.

A5. $\boxed{+\infty}$ La successione è asintotica a $-3/n^{1/2}$.

$\boxed{\text{Per } \alpha = 1\text{: converge per ogni } \beta\text{. Per } \alpha > 1\text{: diverge a } -\infty \text{ per } \beta \le \alpha\text{, converge per } \beta > \alpha.}$

Per $\alpha > 1$ la successione è asintotica a $-\alpha^n/(1+\beta^n)$.

Per $\beta = 1$ la successione è asintotica a $-\alpha^n/2$ e quindi la serie diverge a $-\infty$.

Per $\beta > 1$ la successione è asintotica a $-(\alpha/\beta)^n$ geometrica.

A6. Punto di max loc $x_M = 1$ e min loc $x_m = 2$. Immagine $(0, +\infty)$ non iniettiva.

A7. Si ha $\alpha = 0$ per de l'Hopital (o dalle espansioni). Dal teorema di prolungamento della derivata si ha $g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{3(\cosh(x)-1)}{\sinh^2(x)} = 3/2$ ancora per de l'Hopital.

B1. $\boxed{\int f(x) - f(x_0) = 0}$ per il teorema della media integrale

B2. $\boxed{f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}}$

B3. $\boxed{\text{esiste finito}}$ serie telescopica: $\displaystyle\sum_{n=3}^{k} a_{n+1} - a_n = a_{k+1} - a_3 \to \ell - a_3$.

B4. Ad es. $f(x) = \text{segno}(x) + 1/2$

B5. La prima affermazione è falsa: $a_n = 1/n$.

La seconda è vera. Per definizione si ha $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} s_k$ dove $s_k = \inf\{a_n : n \ge k\}$ è monotona crescente.

Quindi $\inf\{a_n\} = s_0 \le \lim_{k\to+\infty} s_k = \liminf_{n\to+\infty} a_n = A$.