Analisi Matematica I - 05/02/2024 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} \ln(1+5x^2)+1 & x>0 \\ \alpha + e^{\beta x+\gamma x^2} & x \le 0. \end{cases}$

Determinare i parametri reali α, β, γ in modo tale che f sia di classe $C^2(\mathbb{R})$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^{-2}+n^{-3})\tanh(3n)}{\arctan(5n)\tan(n^{-2})}$

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(4x)-e^{3x}}{2x-\sin(4x)}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\int (3+4x)e^{-x}\,dx$.

A5. Sia $\beta_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} n^{7/3}$ e sia $\gamma_k = \ln(k!)$. Studiare il comportamento di $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \beta_k - \gamma_k$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\cosh(3n)}{\sinh(\alpha n)}$ in funzione del parametro reale $\alpha \neq 0$.

A6. Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^{2/x}$. Tracciare un grafico qualitativo di f, calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva, calcolare l'immagine di f.

A7. Sia $w : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $w(x) = (\alpha+\beta x)e^{3x} + (\gamma+\delta x)e^{-3x}$. Determinare i parametri reali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in modo tale che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} w(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} w(x) = 4$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} w'(x) = 0$. Con la scelta precendete dei parametri, calcolare gli eventuali punti di minimo e di massimo (locali e globali) e stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva.

B1. Sia $\{a_n\}$ una successione crescente . Allora $\{a_n\}$ è

$\boxed{\text{A}}$ limitata. $\boxed{\text{B}}$ convergente. $\boxed{\text{C}}$ superiormente limitata. $\boxed{\text{D}}$ inferiormente limitata.

B2. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq x^{\pi/2}$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f'_+(0) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f'_+(0) = +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ $f'_+(0) = \pi/2$. $\boxed{\text{D}}$ $f'_+(0)$ non esiste.

B3. Sia $\{b_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n \geq 0$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^4 \geq 1$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^4 \leq 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^4 < 1$. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^4 = 1$.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, limitata e tale che <u>non</u> esistano $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

B5. Una successione $\{a_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$ si dice convessa se $a_n \leq \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Dimostrare le seguenti implicazioni.

- $\{a_n\}$ convessa $\Rightarrow a_n \leq \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n+2}$ per ogni $n \geq 2$.
- $\{a_n\}$ convessa $\Rightarrow a_n \leq \frac{1}{2}a_{n-2^k} + \frac{1}{2}a_{n+2^k}$ per ogni $n \geq 2^k$ e $k \geq 0$.

B6. Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Fornire una definizione di maggiorante di A e di estremo maggiorante di A.

B7. Fornire l'enunciato e la dimostrazione del criterio del confronto per le serie.

Soluzioni dello scritto del 05/02/24

A1. $\boxed{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 5}$ $\alpha + e^{\beta x + \gamma x^2} \sim \alpha + (1 + \beta x + \gamma x^2) + \frac{1}{2}(\beta x + \gamma x^2)^2 \sim (\alpha + 1) + \beta x + (\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma)x^2$ mentre $\ln(1 + x^2) + 1 \sim 1 + 5x^2$

A2. $\boxed{2/\pi}$ Si ha $n^{-2} + n^{-3} \sim n^{-2}$, $\tanh(3n) \sim 1$, $\arctan(5n) \sim \pi/2$ mentre $\tan(n^{-2}) = \sin(n^{-2})/\cos(n^{-2}) \sim n^{-2}$.

A3. $\boxed{3/2}$ Per sostituzione dalle espansioni note oppure con de l'Hopital.

A4. $\boxed{-e^{-x}(7 + 4x) + C}$ per parti

A5. $\boxed{+\infty}$ $\gamma_k = \sum_{n=2}^{k} \ln(n)$ e quindi $\beta_k - \gamma_k = 1 + \sum_{n=2}^{k} a_n$ con $a_n = n^{7/3} - \ln(n)$. La serie di a_n diverge perchè $a_n \to +\infty$.

$\boxed{\text{Converge per } \alpha > 3, \text{ diverge a } +\infty \text{ per } 0 < \alpha \leq 3, \text{ diverge a } -\infty \text{ per } -3 \leq \alpha < 0 \text{ e converge per } \alpha < -3.}$

Si ha $\cosh(3n) \sim \frac{1}{2}e^{3n}$.

Per $\alpha > 0$ si ha $\sinh(\alpha n) \sim \frac{1}{2}e^{\alpha n}$. Per cfr. asintotico con la serie geometrica b^n con $b = e^{3-\alpha}$.

Per $\alpha < 0$ si ha $\sinh(\alpha n) \sim -\frac{1}{2}e^{-\alpha n}$. Per cfr. asintotico con la serie geometrica $-b^n$ con $b = e^{3+\alpha}$.

A6. Immagine $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Non ci sono punti di min e max. Funzione iniettiva ma non suriettiva.

A7. Per verificare $\lim_{x \to +\infty} w(x) = 0$ è necessario che il primo termine si annulli, quindi $\alpha = \beta = 0$. Le altre condizioni forniscono $\gamma = 4$ e $\delta = 12$. Con questa scelta si ha $w'(0) = 0$ e $w'(x) < 0$ per $x > 0$, quindi la funzione è iniettiva e $x_0 = 0$ punto di max globale. L'immagine è $(0, 1]$.

B1. $\boxed{\text{inferiormente limitata}}$

B2. $\boxed{f'_+(0) = 0}$ $-x^{\pi/2} \leq f(x) \leq x^{\pi/2}$

B3. $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^4 \leq 1}$ $0 \leq b_n \leq 1$ e quindi $b_n^4 \leq b_n$.

B4. Ad es. $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x < 1 \\ \sin(x) & x \geq 1. \end{cases}$

B5. Dalla relazione $a_n \leq \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n+1}$ sostituendo $a_{n-1} \leq \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_n$ e $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_n$.

Per induzione su k. Dalla relazione $a_m \leq \frac{1}{2}a_{m-2^k} + \frac{1}{2}a_{m+2^k}$ sostituendo $m = n - 2^k$ e $m = n + 2^k$.