Analisi Matematica I - 31/01/2023 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

MATRICOLA ______________________________ **Laurea:** ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Determinare il parametro $\alpha > 0$ in modo tale che la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x > 0 \\ \alpha^x & x \leq 0 \end{cases}$ sia

di classe $C^0(\mathbb{R})$ $\boxed{}$ e di classe $C^1(\mathbb{R})$ $\boxed{}$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sinh(n+1)}{e^n} + \frac{n^{1/n}\cosh(n+1)}{n!}$ $\boxed{}$

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(\sqrt{3}x) - \sin(x)}{\ln(1+2x^3)}$ $\boxed{}$

A4. Calcolare $\displaystyle\int_1^{e^2} x\ln^2(x)\,dx$. $\boxed{}$

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n \arctan(n)}{n+1} + \frac{1}{5^n}$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \sin^5(\pi/(n+5)^\alpha)$ in funzione del parametro $\alpha \geq 0$.

A6. Sia $g : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$. Tracciare un grafico qualitativo di g, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di g.

A7. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tanh((n+1)\alpha) - \tanh(n\alpha)$ in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si consideri la funzione $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tanh((n+1)x) - \tanh(nx)$ per $x \in \mathbb{R}$. Tracciare un grafico di S. Stabilire se S sia monotona, limitata e continua.

B1. La funzione $f(x) = -\sinh(-x^3)$ è

$\boxed{\text{A}}$ decrescente e continua. $\boxed{\text{B}}$ continua e limitata. $\boxed{\text{C}}$ continua e crescente.
$\boxed{\text{D}}$ crescente e limitata superiormente.

B2. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) - t\,dt$. Se x_c è un punto critico di F allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(x_c) = x_c$. $\boxed{\text{B}}$ $f'(x_c) = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x_c) = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $f'(x_c) = 0$.

B3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $f(x) = p(x) + o\left((x-x_0)^2\right)$ per $x \to x_0$ dove $p(x) = x+1$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $f(x_0) = 1$ e $f'(x_0) = 1/2$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x_0) = 1$ e $f'(x_0) = 2$. $\boxed{\text{C}}$ $f(x_0) = 1 + x_0$ e $f'(x_0) = 1$.
$\boxed{\text{D}}$ $f(x_0) = x_0$ e $f'(x_0) = 1$.

B4. Fornire un esempio di successione $\{a_k\}$ tale che $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_k$ converga mentre $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_k^2$ diverga.

B5. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$.
Sia $g : (0,1) \to (0,+\infty)$ suriettiva e derivabile, con $g' > 0$. Si consideri la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ f \circ g(x) & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Mostrare che h è continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$. Calcolare h'.

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

B7. Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per le serie.

Soluzioni dello scritto del 31/01/23

A1. $\boxed{\forall\alpha}$ e $\boxed{\alpha = 1}$ Per espansione $\sin(x)/x = 1 - x^2/6 + o(x^2)$.

A2. $\boxed{e/2}$ $\sinh(n+1) \sim e^{n+1}/2$, $n^{1/n} \to 1$, $\cosh(n+1) \sim e^{n+1}/2 = o(n!)$

A3. $\boxed{-2/3}$ Dalle espansioni note per sostituzione oppure con de l'Hopital.

A4. $\boxed{(5e^4 - 1)/4.}$ Si integra due volte per parti derivando ln.

A5. $\boxed{\text{Converge.}}$ La serie di $\dfrac{(-1)^n \arctan(n)}{n+1}$ è a segni alterni e converge per il criterio di Leibniz, in particolare la funzione $g(x) = \arctan(x)/x + 1$ è monotona decrescente in quanto $g'(x) < 0$ per $x > 3$. La serie di $1/5^n$ è geometrica.

$\boxed{\text{Converge per } \alpha = 0 \text{ e per } \alpha > 1/5.}$ Per $\alpha > 0$ si ha $\sin^5(\pi/(n+5)^\alpha) \sim \pi^5/(n+5)^{5\alpha} \sim \pi^5/n^{5\alpha}$. La serie armonica generalizzata converge per $5\alpha > 1$.

A6. Non ci sono punti di max e min. L'immagine è $(-\pi/2, \pi/2) \setminus \{\pi/4\}$.

A7. La somma che definisce la serie è telescopica, quindi

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \tanh((n+1)\alpha) - \tanh(n\alpha) = \tanh((k+1)\alpha)$$

e $\lim\limits_{k\to+\infty} S_k = \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -1 & \alpha < 0 \end{cases}$. Quindi S è monotona crescente, limitata ma non è continua in 0.

B1. $\boxed{\text{C}}$

B2. $\boxed{\text{A}}$ Per il Teorema della Funzione Integrale $F'(x) = f(x) - x$.

B3. $\boxed{\text{C}}$ Scrivendo $p(x) = (x - x_0) + (1 + x_0)$

B4. $a_k = (-1)^k/\sqrt{k}$ la serie di a_k converge per il criterio di Leibniz, quella di $a_k^2 = 1/k$ diverge in quanto armonica

B5. h è continua e derivabile in $(0,1)$ perché composizione di funzioni continue e derivabili. Si ha $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Essendo g monotona crescente e suriettiva si ha $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \inf g = 0$ e $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \sup g = +\infty$. Quindi con il cambio di variabile $y = g(x)$ si ha $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to0} f(y) = 0 = h(0)$ e analogamente $\lim\limits_{x\to1^-} h(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 1 = h(1)$.