Analisi Matematica I - 29/07/2022 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME e NOME ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 2 per $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan\left(\tfrac{\pi}{4}\sin(4s)\right) + 1\, ds$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+5x^2)}{\cos(2x) - e^{-6x^2}}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{6^n} + \frac{(-1)^n \ln(2n+5^n)}{n^3+1}$

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(x^2)\, 5x^2\, dx$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{\,k(\beta^2-3\beta+2)}$ al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln(n)}} + \left(\frac{-1}{\ln(n)}\right)^n$.

A6. Sia $f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi \text{ per } k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$. Stabilire se la funzione sia periodica, pari o dispari. Calcolare la derivata prima e tracciare un grafico qualitativo di f. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali).

A7. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x-1}$ per $x > -2$ e $x \neq 1$. Stabilire se f sia continua, limitata, iniettiva e suriettiva. Studiare la monotonia di f e calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali).

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ esiste un punto di minimo globale. $\boxed{\text{B}}$ esiste un punto di massimo locale.

$\boxed{\text{C}}$ esiste un unico punto di minimo globale. $\boxed{\text{D}}$ esiste un unico punto di massimo locale.

B2. Quale delle seguenti condizioni è sufficiente per la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

$\boxed{\text{A}}$ $a_k^2 = o(n^{-3})$. $\boxed{\text{B}}$ $a_k = o(1)$. $\boxed{\text{C}}$ $a_k^2 = o(1)$. $\boxed{\text{D}}$ $a_k^3 = o(n^{-2})$.

B3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata e sia $x_n \to x$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ esiste una sotto-successione x_{n_k} tale per cui $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})$ esiste finito.

$\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ esiste $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$.

$\boxed{\text{D}}$ esiste una sotto-successione x_{n_k} tale per cui $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$.

B4. Fornire un esempio di funzione Lipschitziana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che f^2 sia Lipschitziana.
Fornire un esempio di funzione Lipschitziana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che f^2 non sia Lipschitziana.

B5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) = f(b)$ e $⨍_a^b f(x)\,dx > f(a)$. Dimostrare che esistono un punto di minimo $x_m \in [a, b]$ e un punto di massimo $x_M \in (a, b)$ per f.

B6. Fornire una definizione di $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

B7. Si consideri $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Stabilire se le seguenti implicazioni siano vere o false fornendo contro-esempi e/o dimostrazioni:

- f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ differenziabile in x_0,
- f differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ derivabile in x_0.

Soluzioni dello scritto del 29/07/22

A1. $\boxed{x+\pi x^2}$ Si ha $F(0)=0$ e $F'(x)=\arctan(\frac{\pi}{4}\sin(4x))+1$ (del teor. della funzione integrale)

A2. $\boxed{5/4}$ Dalle espansioni note per sostituzione oppure con de l'Hopital.

A3. $\boxed{+\infty}$ Per ogni $b>0$ si ha $n! > b^n$ per $n\to+\infty$ e quindi il primo temine diverge a $+\infty$ (oppure per la formula di Stirling). Il secondo termine è infinitesimo perché $\ln(2x+a^x)\sim\ln(a^x)=x\ln a$.

A4. $\boxed{5\pi.}$ Si integra per parti.

A5. $\boxed{\text{Converge per } 1<\beta<2 \text{ e diverge a } +\infty \text{ per } \beta\le -1 \text{ e } \beta\ge 2.}$ La serie è geometrica con $a_k=b^k$ per $b=2^{(\beta^2-3\beta+2)}>0$. Quindi converge se $0<b<1$ e divere se $b\ge 1$.

$\boxed{\text{Converge}}$ La prima serie converge per il criterio del confonto in quanto $\dfrac{1}{n^{\ln(n)}}<\dfrac{1}{n^2}$. La seconda serie converge per il criterio di Leibniz perché la successione $(\ln(n))^n$ è monotona crescente.

A6. La funzione è periodica con $T=2\pi$ ed è pari. Punti di minimo locale (non globale) in $x_m=2k\pi$ e di massimo locale (non globale) in $x_M=\pi+2k\pi$ per $k\in\mathbb{Z}$.

A7. Per semplicità, con il cambio di variabile $z=x+2$ consideriamo $f(z)=\ln(z)/(z-3)$ per $z>0$ e $z\neq 3$. La funzione f è continua (in quanto composizione di funzioni continue), è suriettiva, e quindi non è limitata, e non è iniettiva (si deducono queste proprietà studiando i limiti di f agli estremi del dominio). Si ha $f'(z)=\left(\dfrac{z-3}{z}-\ln z\right)/(z-3)^2$. Mostriamo che $g(z)=\dfrac{z-3}{z}<\ln z=h(z)$ per ogni z. In $(3,+\infty)$ si ha $g(z)<1$ mentre $f(z)>f(3)>1$. In $(0,3)$ si ha $g(z)<h(z)$ definitivamente per $z\to0^+$ e $g(z)<h(z)$ per $z\to3^-$. Supponiamo (per assurdo) che ci sia un intervallo $(z_1,z_2)\subset(0,3)$ tale che $g(z_1)-h(z_1)=g(z_2)-h(z_2)=0$ e $g(z)-h(z)\ge0$ per $z\in(z_1,z_2)$. Per il teor. di Rolle esiste z_* tale che $g'(z_*)-h'(z_*)=0$, i.e., $3/z_*^2-1/z_*=0$, questo è assurdo perché l'equazione precedente ha come soluzione $z=3$.

B1. $\boxed{\text{A}}$

B2. $\boxed{\text{D}}$

B3. $\boxed{\text{A}}$

B4. $f(x)=\cos(x)$ e $f(x)=x$ (ricordare che le funzioni derivabili sono Lipschitziane quando la derivata è limitata)

B5. Dal teor. di Weierstrass esistono $x_m\in[a,b]$ ed $x_M\in[a,b]$. Quindi è sufficiente mostrare che $x_M\notin\{a,b\}$. Essendo $⨍_a^b f(x)dx>f(a)$ si ha $f(x)>f(a)=f(b)$ per qualche $x\in(a,b)$.