**Analisi Matematica I - 14/06/2022 - Tempo a disposizione: 3h**

**COGNOME e NOME** ______________________________

**Laurea:** ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

**A1.** Calcolare $\lim_{x\to 0^+} 3xe^{1/x} - 2x\ln(x)$.

**A2.** Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2(-1)^n + 2^n \arctan(n+1)}{\mathrm{senh}(n)}$.

**A3.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} - x^{-1}\mathrm{sen}(x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 5.

**A4.** Calcolare i seguenti integrali:

$$-\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\, d\theta \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\, d\theta$$

**A5.** Studiare la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n e^{-n^2+n+1}$.

Studiare la serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{\beta}{n^\alpha} - \dfrac{\gamma}{(n+1)^\alpha}$ in funzione dei parametri $\alpha \geq 1$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

**A6.** Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)^{1/2}$. Calcolare la derivata prima e tracciare un grafico qualitativo di $f$, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare i limiti agli estremi del dominio.

**A7.** Si consideri la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2\mathrm{sen}(\pi/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Stabilire se $f$ sia continua, limitata, derivabile, pari o dispari.

Si consideri l'estensione periodica di $f$, i.e., la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}(x + 2k) = f(x)$ per $x \in [-1, 1]$ e $k \in \mathbb{Z}$. Stabilire se $\tilde{f}$ sia continua, limitata, derivabile, pari o dispari. Stabilire infine se i punti $x = \pm 1$ siano punti critici, punti di massimo o punti di minimo.

**B1.** Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e strettamente crescente. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ non esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste finito

**B2.** Sia $f(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$. Allora $x_0$ è un punto di

$\boxed{\text{A}}$ minimo locale. $\boxed{\text{B}}$ massimo globale. $\boxed{\text{C}}$ minimo globale. $\boxed{\text{D}}$ massimo locale.

**B3.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora

$\boxed{\text{A}}$ esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $\displaystyle\int_a^b f(x) - f(x_0)\, dx = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $\displaystyle\int_a^b f(x) - f(x_0)\, dx = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $\displaystyle\int_a^b f(x) - c\, dx = 0$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\int_a^b f(x) - c\, dx = 0$.

**B4.** Fornire un esempio di successione $\{a_n\}$ tale che $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ converga e $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n^2$ diverga.

**B5.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica e tale che esista finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Dimostrare che $f$ è costante.

**B6.** Fornire una definizione di $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0^+$.

**B7.** Si consideri $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Stabilire se le seguenti implicazioni siano vere o false fornendo contro-esempi e/o dimostrazioni:

- $f$ derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in $x_0$,
- $f$ continua in $x_0 \Rightarrow f$ derivabile in $x_0$.

## Soluzioni dello scritto del 14/06/22

**A1.** $\boxed{0}$ Il numeratore è asintotico a $\frac{\pi}{2}2^n$. Il denominatore è asintotico a $\frac{1}{2}e^n$.

**A2.** $\boxed{x^3 + \frac{2}{3}x^5}$ Dalle espansioni note per sostituzione.

**A3.** $\boxed{+\infty}$ La sostituzione $t = 1/x$ porta a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t/t + \ln(t)/t = +\infty$.

**A4.** $\boxed{1/3.}$ Primitiva $-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)$

$\boxed{\pi/4.}$ Usare la formula trigonometrica $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta/2))$ oppure l'interpretazione geometrica.

**A5.** $\boxed{\text{Converge}}$ La serie converge per il criterio di Leibniz.

$\boxed{\text{Per } \alpha > 1 \text{ converge per ogni } \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \text{ Per } \alpha = 1 \text{ converge se } \beta = \gamma, \text{ altrimenti diverge.}}$

Per $\alpha > 1$ le serie di $1/n^\alpha$ e di $1/(n+1)^\alpha$ sono geometriche generalizzate con esponente $\alpha > 1$, e quindi convergono. Per $\alpha = 1$ si ha $\beta/n - \gamma/(n+1) = \dfrac{(\beta-\gamma)n + \beta}{n(n+1)} \sim (\beta - \gamma)/n + \beta/n^2$.

**A6.** Il punto $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ è il massimo globale. Si ha $f(1) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x \neq 1$. Quindi $x_0 = 1$ è il minimo globale.

**A7.** La funzione $f$ è continua e derivabile in $[-1, 1] \setminus \{0\}$ per composizione. Inoltre $-x^2 \leq f(x) < x^2$ e quindi $f$ è continua e derivabile (con derivata nulla) anche nell'origine. La funzione $f$ è dispari e quindi $f'$ è pari. Si noti che $f(-1) = f(1) = 0$ e quindi $\tilde{f}$ è continua. Inoltre $f'(-1) = f'(1) = -1$, ne segue che $\tilde{f}$ è derivabile e $\pm 1$ non sono nè punti critici nè punti di minimo o massimo.

**B1.** $\boxed{\text{D}}$

**B2.** $\boxed{\text{D}}$

**B3.** $\boxed{\text{D}}$ massimo locale in quanto $f'(x_0) = 0$ mentre $f''(x_0) = -1$.

**B4.** $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$

**B5.** Dalla definizione di limite per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon$ tale che $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ per ogni $x > x_\varepsilon$. Essendo $f$ periodica si ha $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ha $f(x) = l$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.