Analisi Matematica I - 31/01/2022 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola ____________________ **COGNOME e NOME** ____________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Determinare i parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ in modo tale che la seguente funzione sia di classe $C^1(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln(1+2x^2) & x < 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & x \geq 0 \end{cases}$$

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 - 2n + 9}{2n(2-n)(2n-4)}$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{3n}(\cosh(n) - \operatorname{senh}(n)) + \ln(1+e^{-n}).$$

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x) - e^{2x} + \cos(2x)}{x^\beta + x^2}$ in funzione del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 3\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\, dx$.

A5. Sia $z_n = n^{1/(\ln(n)+1)}$. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n$ e studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} z_n$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\tanh(n^2) + n^5}{n^\alpha + \ln(n^5)}$ in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

A6. Sia $f : (0, +\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \sqrt{1/|\ln x|}$. Calcolare la derivata prima di f e tracciare un grafico qualitativo di f, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di f.

A7. Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ monotona decrescente e continua e sia $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \displaystyle⨍_0^x f(t)\, dt$. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x)$. Calcolare g' e mostrare che g è monotona. Verificare che se f è di classe C^1 si ha anche $g'(x) = x^{-1}\displaystyle⨍_0^x t f'(t)\, dt$.

B1. Sia f derivabile in x_0 con $f(x_0) = f'(x_0) = 1$. Allora $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f^2(x_0+h) - f^2(x_0)}{h^2}$

$\boxed{\text{A}}$ 1. $\boxed{\text{B}}$ 0. $\boxed{\text{C}}$ $+\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $-\infty$.

B2. Siano $f(x) = o(x^2)$ e $g(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$. Allora $h(x) = g(x) - f(x)$ è

$\boxed{\text{A}}$ $o(x^5)$. $\boxed{\text{B}}$ $o(x^2)$. $\boxed{\text{C}}$ $o(x)$. $\boxed{\text{D}}$ $o(x^3)$.

B3. Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Allora f è

$\boxed{\text{A}}$ integrabile. $\boxed{\text{B}}$ suriettiva. $\boxed{\text{C}}$ lipschitziana. $\boxed{\text{D}}$ derivabile.

B4. Fornire un esempio di successione limitata $\{a_n\}$ tale che $\limsup_{n\to+\infty} a_n \neq \liminf_{n\to+\infty} a_n$.

Fornire un esempio di successione limitata $\{b_n\}$ tale che $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k}$ diverga mentre $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1}$ converga.

B5. Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy tale che $u_n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+2}}$.

B6. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione di A. Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^-$.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema di Cauchy.

Soluzioni dello scritto del 31/01/22

A1. $\boxed{\gamma = 1,\ \beta = 0,\ \text{ogni } \alpha}$ È sufficiente utilizzare l'espansione $\ln(1+z) = z + o(z)$ con $z = 2x^2$.

A2. $\boxed{-1/4}$ Numeratore e denominatore sono asintotici al termine di grado massimo.
$\boxed{+\infty.}$ Il primo termine si riscrive come e^{3n-n} mentre il secondo è infinitesimo.

A3. $\boxed{-2 \text{ se } \beta = 2,\ -4 \text{ se } \beta > 2,\ 0 \text{ se } \beta < 2}$ Dalle espansioni note, per sostituzione, il numeratore è asintotico a $-4x^2$. Se $\beta = 2$ il denominatore è asintotico $2x^2$. Se $\beta > 2$ il denominatore è asintotico a x^2. Se $\beta < 2$ il denominatore è asintotico a x^β.

A4. $\boxed{\frac{1}{2}\pi - 1 + \ln(2).}$ Si integra per parti derivando arctan.

A5. $\boxed{z_n \to e \text{ e la serie diverge a } +\infty}$ Scrivendo $z_n = e^{\ln z_n}$ si ha $z_n = e^{\ln(n)/\ln(n)+1} \to e$. Quindi la serie diverge a $+\infty$.

$\boxed{\text{Converge per } \alpha > 6 \text{ e diverge a } +\infty \text{ altrimenti.}}$ Serie a termini positivi, con numeratore asintotico a n^5 . Se $\alpha > 0$ il denominatore è asintotico a n^α: per il criterio del cfr. asinotico con la serie armonica generalizzata, la serie converge se $\alpha > 6$, altrimenti diverge a $+\infty$. Se $\alpha \le 0$ il denominatore è asintotico a $\ln(n^3)$. Quindi la successione diverge e con lei la serie.

A6. $f'(x) = -(\ln(x))^{-3/2}/2x$ se $x > 1$ e $f'(x) = (-\ln(x))^{-3/2}/2x$ se $x < 1$. Non ci sono punti di max e min locale. Immagine $(0, +\infty)$.

A7. Scrivendo $g(x) = x^{-1} \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ per il Teor. della funzione integrale si ha

$$g'(x) = x^{-2}\big(f(x)x - \int_0^x f(t)dt\big) = x^{-2}\Big([f(t)t]_0^x - \int_0^x f(t)dt\Big) = x^{-2}\int_0^x f'(t)t\,dt$$

dove si è usata l'integrazione per parti nell'ultimo passaggio (se f è di classe C^1).
Si ha $f(t) \ge f(x)$ per $t < x$ quindi $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \ge \int_0^x f(x)\,dt = f(x)x$. Quindi il numeratore di g' è negativo. Se la funzione f è C^1 allora si ha anche $g' \le 0$ essendo $f' \le 0$.

B1. $\boxed{\text{C}}$ usando il Teorema di Lagrange $f^2(x_0 + h) - f^2(x_0) = h2f(x_h)f'(x_h) \sim 2h$.

B2. $\boxed{\text{B}}$ usando la definizione di o

B3. $\boxed{\text{A}}$

B4. $\boxed{a_n = (-1)^n\,,\ b_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ pari} \\ 1/n^2 & n \text{ dispari} \end{cases}}$

B5. $\boxed{0}$ u_n di Cauchy allora u_n convergente. Quindi $u_n \to \ell$ con $\ell \ge 1$ in quanto $u_n > 1$. Di conseguenza $u_{n-1} - u_n/u_{n+2} \to 0/\ell$.