Analisi Matematica I - 05/09/2023 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME ______________________________ **NOME** ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cosh(\arctan(e^t))\, dt$ e sia F^{-1} la sua inversa.

Calcolare $F(0), F'(0)$ e $(F^{-1})'(0)$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n^2+1} - \cos(1 - 2\log_3 n)}{\sin(n!) + \ln(2 + n^3)}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1 + 2x) - \sin(x^2)}{\cos(x) - 1}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 2x \arctan(x)\, dx$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n!) + 2}$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^\alpha)}{n^2 + n^\alpha}$ in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

A6. Sia $f : \mathbb{R} \setminus -1 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \left|\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right|$. Tracciare un grafico qualitativo di f, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Stabilire se la funzione sia iniettiva e suriettiva, calcolare l'immagine di f.

A7. Sia $f : [0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^{\tan(x)} + \sin(x) + 1$. Calcolare f'. Stabilire se f sia crescente o decrescente, concava o convessa. Stabilire inoltre se esistono punti critici e punti di flesso. Calcolare la retta tangente al grafico in $x_0 = 0$.

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente decrescente. Allora f è

A continua. B derivabile. C suriettiva. D iniettiva.

B2. Sia $f : [a, b] \to [0, 1]$ integrabile. Allora

A $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$. B $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \neq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

C $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| > \int_a^b |f(x)|\,dx$. D $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < \int_a^b |f(x)|\,dx$.

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi e sia $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ per $k \in \mathbb{N}$. Allora $\{S_k\}$ è

A convergente. B divergente. C limitata. D monotona.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ per la quale esista un punto di minimo (globale) ma non esista un punto di massimo (globale).

B5. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Sia $\{a_{n_i}\}$ una sua sottosuccessione. Stabilire se la seguente implicazione sia vera o falsa (fornendo una dimostrazione o un contro-esempio):
se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora $\sum_{i=0}^{+\infty} a_{n_i}$ converge.

B6. Fornire una definizione di $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

B7. Fornire l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Cauchy.

Soluzioni dello scritto del 05/09/23

A1. $\boxed{0, \cosh(\pi/4), 1/\cosh(\pi/4)}$ Si ha $F(0) = 0$ e $F'(x) = \cosh(\arctan(e^x))$, quindi $(F^{-1})'(0) = 1/F'(0)$.

A2. $\boxed{+\infty}$ Il numeratore è asintotico al termine esponenziale, che diverge, mentre il termine trigonometrico resta limitato. In modo analogo il denominatore è asintotico al termine logaritmico.

A3. $\boxed{-2}$ Per le espansioni note il numeratore è asintotico a $2x^2 - x^2$ mentre il denominatore è asintotico a $-x^2/2$.

A4. $\boxed{-1 + \pi/2}$ Si integra per parti una volta, poi si scrive $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$. La primitiva è $x^2 \arctan x - x + \arctan x$.

A5. $\boxed{\text{Converge}}$ Criterio di Leibniz.

$\boxed{\text{Converge per ogni } \alpha}$

Se $\alpha \leq 0$ si ha $n^\alpha \to 0$ e quindi la sucessione a_n è a termini positivi: a_n è asintotica a $1/n^2$ per $\alpha < 0$ mentre è asintotica a $\cos(1)/n^2$ per $\alpha = 0$. In entrambi i casi, la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica (generalizzata).

Se $\alpha > 0$ allora n^α diverge e il segno del numeratore oscilla (ma non è a segni alterni). Si usa il criterio della convergenza assoluta. Si ha $|a_n| \leq 1/n^2$ e quindi la serie di $|a_n|$ converge per confronto con la serie armonica (generalizzata). Ne segue che converge anche la serie di a_n.

(In alternativa si può usare la convergenza assoluta per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$).

A6. Punto di min (angoloso) in 1. L'immagine è $[0, \pi/2)$.

A7. Si ha $f'(x) = e^{\tan(x)}(1 + \tan^2(x)) + \cos(x) > 0$ per $x \in [0, \pi/2)$. Quindi f è strettamente crescente e non ci sono punti critici. Inoltre

$$f''(x) = e^{\tan(x)}(1 + \tan^2(x))^2 + e^{\tan(x)}(2\tan(x)(1 + \tan^2(x))) - \sin(x).$$

Notiamo che $g(x) = e^{\tan(x)}(1 + \tan^2(x))^2 + e^{\tan(x)}(2\tan(x)(1 + \tan^2(x)))$ è strettamente crescente con $g(0) = 1$. Mentre $-\sin(x) > -1$. Quindi $f''(x) > 0$. Retta tangente $y = 2(x + 1)$.

B1. $\boxed{\text{D}}$ iniettiva

B2. $\boxed{\text{A}}$ Essendo f a valori positivi si ha $\displaystyle\int |f| = \int f = |\int f|$.

B3. $\boxed{\text{D}}$

B4. Sia $f(x) = \begin{cases} x & a \leq x < b \\ a & x = b. \end{cases}$

B5. Vera. Sia $S_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} a_n$ e sia $B_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_{n_j}$. Allora $B_k \leq A_{n_k} \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Quindi B_k è monotona (decrescente) e limitata. Di conseguenza converge.