

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_

Laurea: ☐ Matematica ☐ Fisica

**A1.** Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro  $x_0 = e$  per  $f(x) = \cos(\pi \ln(x)) + 1$ .

**A2.** Calcolare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/2} + \cos(n^{1/3} + 1)}{(-1)^n + n^{1/3} + 3}$

**A3.** Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right) + 2 \cos\left(\frac{3}{x^2}\right)$

**A4.** Calcolare  $\int_0^1 \frac{1}{4x+1} + \frac{1}{3x^2+1} dx$ .

**A5.** Studiare il comportamento della serie  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1+4n^2}{n^5 + \ln(5n)}$ .

Studiare il comportamento della serie  $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\lambda^n 5^\lambda}{2^n}$  in funzione del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**A6.** Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $g(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$

Tracciare un grafico qualitativo di  $g$ , indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di  $g$ .

**A7.** Si consideri la successione  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  definita da  $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = \frac{1}{3}(3^{x_k} - 1). \end{cases}$

Dimostrare (per induzione) che la successione  $\{x_k\}$  è positiva. Dimostrare (per induzione) che  $\{x_k\}$  è decrescente. Dedurre che  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \ell$  e dimostrare che  $\ell = 0$  (usando  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ ).

**B1.** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile con  $f'$  positiva e crescente. Allora  $f$  è

- ☐ A crescente e convessa. ☐ B decrescente e convessa. ☐ C decrescente e concava.  
☐ D crescente e concava.

**B2.** Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione tale che  $0 < a_n \leq a_{n+1}/(n+1)$ . Allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- ☐ A converge. ☐ B diverge a  $+\infty$ . ☐ C diverge a  $-\infty$ . ☐ D oscilla.

**B3.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora

- ☐ A  $\exists y \in \mathbb{R} / f(x) \leq y \forall x \in [a, b]$ . ☐ B  $\forall y \in \mathbb{R} \exists! x \in [a, b] / f(x) \geq y$ .  
☐ C  $\exists! y \in \mathbb{R} / f(x) > y \forall x \in [a, b]$ . ☐ D  $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in [a, b] / f(x) = y$ .

**B4.** Fornire un esempio di successione  $\{a_k\}$  strettamente crescente e tale che  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  converga.

**B5.** Fornire un esempio di funzione  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  limitata tale che non esista  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

Dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} f(x) = 0$ .

**B6.** Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione limitata. Fornire una definizione di  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

**B7.** Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.

---

## Soluzioni dello scritto del 20/02/23

**A1.**  $p_2(x) = (\pi/e^2)(x - e)^2$

**A2.**  $+\infty$  La funzione è asintotica a  $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

**A3.**  $5$  Si ha  $\sin(1/x) \sim 1/x$  e  $\cos(1/x) \sim 1$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

**A4.**  $\frac{1}{4} \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3})$ .

**A5.**  $\text{Converge.}$  La successione è asintotica a  $4/n^3$  la cui serie (armonica generalizzata) converge.

Converge per  $|\lambda| < 5$ , diverge per  $\lambda \geq 5$  e oscilla per  $\lambda \leq -5$ .

 Si riscrive la serie come  $5^\lambda \sum_{n=5}^{+\infty} (\lambda/2)^2$ .

Si ha quindi una serie armonica

**A6.** Punto di max in  $x_0 = 1$ . L'immagine è  $(0, 1]$ .

Si consideri  $g(z) = \arctan(z)/z$  per  $z \neq 0$  (funzione pari). Si vede facilmente che  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z) = 0$  e che  $g(z) > 0$ . Si ha  $\arctan(z) = z - \frac{1}{3}z^3 + o(z^4)$ , quindi  $g(z) \sim 1 - \frac{1}{3}z^2$  per  $z \rightarrow 0$ , di conseguenza  $z = 0$  è un punto di max locale di  $g$  e  $g'(0) = 0$ . Per  $z \neq 0$  si ha  $g'(z) = (z/(1+z^2) - \arctan(z))/z^2 = \phi(z)/z^2$ . Si ha  $\phi(0) = 0$  e  $\phi'(z) < 0$  per  $z > 0$ . Quindi  $\phi(z) < 0$  per  $z > 0$ , da cui  $g'(z) < 0$  per  $z > 0$ .

**A7.** Si ha  $x_0 = 1$ . Dimostrare che  $x_k > 0 \Rightarrow x_{k+1} > 0$ : essendo  $x_k > 0$  si ha  $3^{x_k} > 1$  e quindi  $x_{k+1} = 3(3^{x_k} - 1) > 0$ .

Si ha  $1 = x_0 \geq x_1 = 2/3$ . Dimostrare che  $x_k \geq x_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} \geq x_{k+2}$ : per monotonia della funzione esponenziale si ha  $3^{x_k} \geq 3^{x_{k+1}}$  e quindi  $(3^{x_k} - 1) \geq (3^{x_{k+1}} - 1)$ , da cui  $x_{k+1} \geq x_{k+2}$ .

Si ha  $\{x_k\}$  positiva e monotona, quindi  $x_k \rightarrow \ell$  con  $0 \leq \ell < 1 = x_0$ . Passando al limite la formula di ricorrenza  $3x_{k+1} = 3^{x_k} - 1$  si ha  $3\ell = 3^\ell - 1$ , quindi  $\ell$  è l'ascissa di uno dei punti di intersezione tra il grafico di  $f(\ell) = 3\ell$  e quello di  $g(\ell) = 3^\ell - 1$ . Di certo  $g(0) = f(0)$  e dunque  $\ell = 0$  è un punto di intersezione. (A questo punto può essere utile tracciare un grafico di  $f$  e  $g$ ). Essendo  $f'(0) > g'(0)$  si ha  $f(\ell) > g(\ell)$  in un intorno destro di 0. Essendo  $f(\ell) < g(\ell)$  per  $\ell$  sufficientemente grande ci sarà un altro punto di intersezione  $\ell^* > 0$  (non ci sono altri punti di intersezione essendo  $g(\ell)$  strettamente convessa). Essendo  $f(1) > g(1)$  si ha  $\ell^* > 1$ .

**B1.**  $A$

**B2.**  $B$   $a_n \rightarrow +\infty$

**B3.**  $A$  Per continuità si ha  $f([a, b]) = [A, B]$  ed  $y$  è un maggiorante.

**B4.**  $a_k = -1/k^2$

**B5.** Es:  $f(x) = \sin(1/x)$ . Si ha  $|f(x)| \leq c$  e quindi  $-cx^{1/2} \leq x^{1/2}f(x) \leq cx^{1/2}$ , si conclude per confronto (teorema dei Carabinieri).