Analisi Matematica I - 21/02/2022 - Tempo a disposizione: 3h

COGNOME e NOME ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica**

A1. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(x^2)+\cos(x^{-2})}{\cosh(x^2)+\cosh(x^{-2})}$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1+3n^{-2}\right) + 2^{-n}\ln(n+1)\, n^3$.

A3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^{-2}\big(2\sin(x^2)+\arctan(5x^4)\big) & x\neq 0 \\ 2 & x=0. \end{cases}$

Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 6.

A4. Calcolare le primitive della funzione $f(x) = x^2 e^x$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n(5+n^{-2})}{\ln(n-1)}$.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{n^{-5}+e^{1/n}}{5n+e^{\alpha n}}$ in funzione del parametro $\alpha\in[0,+\infty)$.

A6. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{2}e^{-|x|}\big)$. Stabilire se f sia pari o dispari. Calcolare la derivata prima e tracciare un grafico qualitativo di f, indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di f.

A7. Si consideri la successione $b_n = \ln(n!)$ per $n\geq 2$. Dimostrare che $b_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$. Dedurre che $\displaystyle\int_2^{n+1}\ln(x-1)\,dx \leq b_n \leq \int_2^{n+1}\ln(x)\,dx$. Dalla relazione precedente mostrare che $b_n\sim n\ln(n)$.

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora $g(x) = -f(-x)$ è

$\boxed{\text{A}}$ pari. $\boxed{\text{B}}$ convessa. $\boxed{\text{C}}$ dispari. $\boxed{\text{D}}$ concava.

B2. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili e sia $f \leq g$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_b^a g(t)\,dt.$ $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt.$ $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_b^a g(t)\,dt \leq \int_b^a f(t)\,dt.$

$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$

B3. Sia $\{a_n\}$ una successione e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Si consideri la successione $b_n = f(a_n)$.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\{a_n\}$ è monotona allora $\{b_n\}$ converge. $\boxed{\text{B}}$ Se $\{a_n\}$ è limitata allora $\{b_n\}$ converge.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\{a_n\}$ è limitata allora $\{b_n\}$ è limitata. $\boxed{\text{D}}$ Se $\{a_n\}$ converge allora $\{b_n\}$ converge.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ limitata e tale che il $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ non esista.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente, continua e tale che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Dimostrare che esiste un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

B6. Fornire una definizione di funzione convessa.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema del confronto per le serie a termini positivi.

Soluzioni dello scritto del 21/02/22

A1. $\boxed{0}$ Il numeratore oscilla ma si mantiene limitato. Il denominatore tende a $+\infty$.

A2. $\boxed{3}$ Da $\ln(1+z) \sim z$ si ha $n^5 \ln(1+3n^{-5}) \sim 3$. Il secondo temine è infinitesimo per la presenza del termine 2^{-n}.

A3. $\boxed{p(x) = 2 + 5x^2 - \frac{1}{3}x^4}$ Dalle espansioni $\operatorname{sen}(z) = z - \frac{1}{6}z^3 + o(z^4)$ e $\arctan(z) = z + o(z^2)$ per sostituzione si ha $2\operatorname{sen}(x^2) + \arctan(5x^4) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^6 + 5x^4 + o(x^8)$. Dividendo per x^2 si ha il risultato, con errore $o(x^6)$.

A4. $\boxed{e^x(x^2 - 2x + 2) + c.}$ Si integra due volte per parti derivando x^2.

A5. $\boxed{\text{converge}}$ La serie converge per il criterio di Leibniz. Infatti $5 + n^{-2}$ tende a 5 ed è monotona decrescente. Mentre $\ln(n-1)$ tende $+\infty$ ed è crescente. Quindi $(5+n^{-2})/\ln(n-1)$ è infinitesima e decrescente.

$\boxed{\text{diverge per } \alpha = 0 \text{ e converge per } \alpha > 0.}$ Il numeratore è sempre asintotico ad 1.
Per $\alpha = 0$ il denominatore è asintotico a $5n$, per $\alpha > 0$ è asintotico ad $e^{\alpha n}$. Quindi per $\alpha = 0$ la successione è asintotica a $1/5n$ la cui serie (armonica) diverge. Per $\alpha > 0$ la successione è asintotica a $1/e^{\alpha n}$ la cui serie (geometrica) converge.

A6. La funzione è pari. Per $x > 0$ si ha $f'(x) = -\cos(\frac{\pi}{2}e^{-x})\frac{\pi}{2}e^{-x}$. Quindi $f'(0) = 0$. Inoltre (per $x > 0$) si ha $0 \leq \frac{\pi}{2}e^{-x} \leq \frac{\pi}{2}$ e quindi $0 \leq \cos(\frac{\pi}{2}e^{-x}) \leq 1$. Ne segue che $f'(x) < 0$ per $x > 0$. È semplice verificare che $f(x) \to 0^+$ per $x \to +\infty$. Quindi l'immagine è $(0, 1]$ e $x_0 = 0$ è l'unico di punto di massimo.

A7. Dalla definizione di fattoriale e dalle proprietà dei logaritmi si ha $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.
Tracciando un grafico della funzione $\ln(x)$ e della funzione $\ln(x-1)$ ed indicando i punti della successione $\ln(n)$ si vede che vale la relazione integrale. Calcolando esplicitamente l'integale si ha $n\ln(n) - n + 1 \leq b_n \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$. dividendo per $n\ln(n)$ si ottiene $b_n \sim n\ln(n)$ per il teorema dei carabinieri.

B1. $\boxed{\text{D}}$

B2. $\boxed{\text{C}}$ Dalle proprietà degli integrali.

B3. $\boxed{\text{C}}$ Si ha $K_* \leq a_n \leq K^*$ e quindi $f(K_*) \leq f(a_n) \leq f(K^*)$ se f è crescente oppure $f(K_*) \geq f(a_n) \geq f(K^*)$ se f è decrescente.

B4. $\boxed{f(x) = \operatorname{sen}(1/x)}$

B5. Dalla definizione di limite esistono $x_1 < 0$ ed $x_2 > 0$ tali che $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Per il teorema degli zeri nell'intervallo $[x_1, x_2]$ esiste un punto punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. Il punto è unico in quanto f è strettamente monotona.