Analisi Matematica I - 06/09/2021 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola ______________ **COGNOME e NOME** ____________________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica** **Orale:** ☐ **19/07**

Note: ____

A1. Sia $f(x) = x^{\sin(x)}$ per $x > 0$. Calcolare $f'(x)$.

A2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n+3} + \frac{\ln(n)+\ln(2)}{\ln(n^2)-\ln(n)} + \frac{3^n+e^{-2n}}{2^n-e^n}$.

A3. Stabilire per quali valori dei parametri reali α e β si ha $\sin^3(x) \sim \alpha(x-\pi)^\beta$ per $x \to \pi$.

A4. Calcolare $\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2}\, dx$

A5. Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^{-n}(1+\alpha n^2)}{\ln(2n+1)}$ in funzione del parametro reale α.

Studiare il comportamento della serie $\sum_{m=0}^{+\infty} [\cos(m\pi)+\sin(m\pi)](-1)^{2m+m+1}$.

A6. Sia $f(x) = \ln(\cos(x)+1)$ per $x \neq (2k+1)\pi$ e $k \in \mathbb{N}$. Tracciare un grafico qualitativo di f indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di f. Stabilire se la funzione f sia pari, dispari, iniettiva, suriettiva e periodica.

A7.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \big[1-|x-1|\big]_+$. Tracciare un grafico di f.

Si considerino le funzioni $g_k(x) = e^{-k} f(x-2k)$ per $k \in \mathbb{N}$ e la funzione $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$. Tracciare un grafico di G.

Sia $a_m = \int_0^{2m} G(x)\, dx$ per $m \in \mathbb{N}$. Calcolare $\lim_{m\to\infty} a_m$.

B1. Sia a_n una successione limitata. Allora

$\boxed{\text{A}}$ esiste una sottosuccessione a_{n_k} non-limitata. $\boxed{\text{B}}$ a_n è definitivamente monotona.
$\boxed{\text{C}}$ esiste una sottosuccessione a_{n_k} convergente. $\boxed{\text{D}}$ a_n è convergente.

B2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Siano $c, d \in (a, b)$ tali che $f(a)f(b)f(c)f(d) < 0$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ esiste $x_0 \in [a, c]$ tale che $f(x_0) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ esiste $x_0 \in [d, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.
$\boxed{\text{C}}$ esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $x_0 \in [c, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

B3. Sia $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx > \tfrac{1}{2}\inf\{f\}$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx \leq \tfrac{1}{2}\sup\{f\}$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx < 2\inf\{f\}$.
$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx \geq 2\sup\{f\}$.

B4. Fornire un esempio di funzione $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ che verifichi la seguente proprietà:
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in (-\infty, 0)$ tale che $-\varepsilon \leq f(x) \leq 0$ per ogni $x < \bar{x}$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona e suriettiva. Dimostrare che:

se $x_1 < x_2$ allora $f([x_1, x_2])$ è un intervallo.

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = L^-$.

B7. Enunciare e dimostrare la condizione necessaria di convergenza delle serie.

Soluzioni dello scritto del 06/09/21

Parte A

A1. $\boxed{f'(x) = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \sin x/x).}$ Riscrivere $f(x) = e^{\sin x \ln x}$ e derivare.

A2. $\boxed{-\infty.}$ $\dfrac{n^2+n}{n+3} \sim n$, $\dfrac{\ln n + \ln 2}{\ln(n^2) - \ln n} \sim 1$, $\dfrac{3^n + e^{-2n}}{2^n - e^n} \sim -(3/e)^n$ con $3/e > 1$.

A3. $\boxed{\alpha = -1, \beta = 3.}$ Si ha $\sin x \sim -(x-\pi)$ per $x \to \pi$

A4. $\boxed{\text{arctan}x - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x).}$

A5. $\boxed{\text{Converge per ogni } \alpha \in \mathbb{R}}$ Per convergenza assoluta. $|1+\alpha n^2| \le e^{cn}$ per ogni $c > 0$. Ad es. con $c = 1/2$ la serie dei moduli è maggiorata dalla serie di $e^{-n+n/2} = e^{-n/2}$ che converge, in quanto geometrica con $b = e^{-2} < 1$.

$\boxed{\text{Diverge a } +\infty}$ Si ha $[\cos(m\pi) + \sin(m\pi)](-1)^{2m+m+1} = 1$ per ogni m in quanto $\sin(m\pi) = 0$,

$$\cos(m\pi) = \begin{cases} -1 & m \text{ pari} \\ 1 & m \text{ dispari} \end{cases}, \quad (-1)^{2m+m+1} = -(-1)^m = \begin{cases} -1 & m \text{ pari} \\ 1 & m \text{ dispari} \end{cases}.$$

A6. Funzione pari e periodica (quindi non iniettiva) che possiamo studiare tra $(-\pi, \pi)$. Max globale in 0. Immagine $(-\infty, \ln(2)]$, quindi non suriettiva.

A7. Si ha $\int g_k(x)\,dx = \frac{1}{2}e^{-k}$. Quindi $a_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2}e^{-k}$ e $\lim_{m\to+\infty} a_m = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{2}\dfrac{1}{1-e^{-1}}$.

Parte B (es. 1-5)

B1. $\boxed{\text{C}}$ Per Bolzano-Weierstrass

B2. $\boxed{\text{C}}$ Essendo $f(a)f(b)f(c)f(d) < 0$ esiste una coppia di punti $x_1, x_2 \in \{a,b,c,d\}$ con segno di f diverso. Si applicata il teorema degli zeri in $[x_1, x_2] \subset [a,b]$.

B3. $\boxed{\text{B}}$

B4. Si prenda una qualsisi funzione tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$

B5. Se f crescente $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ per $x \in [x_1, x_2]$, quindi $f([x_1, x_2]) \subset [f(x_1), f(x_2)]$. Inoltre, per invertibilittà ogni $y \in [f(x_1), f(x_2)]$ ammette una contro-immagine x. Per monotonia si ha $x_1 \le x$ e $x \le x_2$.