Metodi Matematici per l'Ingegneria - 22/06/2012

1-OT. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e siano $\mathbf{x}_k$ e $\mathbf{p}^{(k)}$ rispettivamente iterata e direzione al passo k-esimo di un metodo iterativo:

1. quale condizione deve verificare il vettore $\mathbf{p}^{(k)}$ affinchè risulti una direzione discesa per f in $\mathbf{x}_k$,
2. motivare la condizione precedente considerando la traccia di f lungo la semiretta uscente da $\mathbf{x}_k$ ed avente direzione e verso di $\mathbf{p}^{(k)}$,
3. scrivere i passi di un algoritmo per la ricerca lineare del passo basato sulla strategia di backtracking e sulla regola di Armijo.

2-OT. Si consideri la funzione $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + \ x_2^2 - \ b\ x_2\ (x_1 + \ 1)$.

1. Determinare l'insieme dei valori (a, b) per cui $f(\mathbf{x})$ risulta avere un unico minimo.
2. A partire da una generica iterata $\mathbf{x}^{(k)}$ si applichi il metodi di Newton per la ricerca dei minimi di $f(\mathbf{x})$ e si determini l'iterata $\mathbf{x}^{(k+1)}$.
3. Si confronti $\mathbf{x}^{(k+1)}$ con il punto di minimo di $f(\mathbf{x})$ e si commenti il risultato tenendo presente la struttura della funzione considerata.
4. Calcolare il valore di minimo $f(\mathbf{x}^*)$.

3-OT. Si consideri la funzione $\Phi(\mathbf{x}) = \ c\ [f(\mathbf{x})]^3$ dove $f(\mathbf{x})$ è la funzione dell' **Esercizio :2-OT** con $a = 2$, $b = 1$ e $c = 256$.

1. Caratterizzare i punti stazionari.
2. Si calcoli l' Hessiana di Φ in termini dell'Hessiana e del gradiente di $f(\mathbf{x})$. Si discuta la definita posititività dell' Hessiana di Φ nei suoi punti stazionari.
3. Sperimentalmente si ricerchi il minimo assoluto utilizzando la function **fminunc** assegnando le seguenti **options** :
   - il tipo di problema non è LargeScale;
   - si scelga sia l'update *bfgs* ;
   - la direzione iniziale sia determinata prendendo come matrice iniziale approssimante l'Hessiana, la matrice di identità scalata;
   - fornire il gradiente;
   - assegnare le seguenti tolleranze: TolFun:1.e-13; TolX: 1.d-13;

   Riportare la prima, la decima, la ventesima ... e l'ultima iterata con i seguenti dati:

   iteration, Func-count, f(x), step-size, first-order condition, (x(1),x(2))

   ottenuti partendo dai seguenti punti iniziali:

   - $\mathbf{x}_0 = (2, 2)^T$
   - $\mathbf{x}_0 = (1, 2)^T$
   - $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)^T$

- $\mathbf{x}_0 = (-1, -1)^T$.

Verificare se in effetti è stato trovato un minimo discutendo il grafico 3D della funzione obiettivo e/o della traccia della Φ lungo rette uscenti dal punto $\mathbf{x} = (x(1), x(2))$ a cui converge l'algoritmo mediante il programma:

- figure(2)
- xp(1)=x(1)+0.4;
- xp(2)=x(2)-1.2;
- ————————————————————-
- nel caso $\mathbf{x}_0 = (-1, -1)^T$ si scelga invece il punto
- xp(1)=x(1)+0.5;
- xp(2)=x(2)+1.2;
- ————————————————————-
- ip=80;
- ux=x(1)-xp(1);
- uy=x(2)-xp(2);
- incr=1/ip;
- for i=1:ip;
- sp(i)=incr*(i-1);
- xi=xp(1)+sp(i)*ux;
- yi=xp(2)+sp(i)*uy;
- $fplot(i) = c * (a * xi^2 + yi^2 - b * yi * (xi + 1))^3$;
- $fy(i) = c * (yi^2 - b * yi)^3$;
- end
- plot(sp,fplot)
- axis([-0 1. -6 5])
- hold on
- plot(sp,fy,'r')

1-TD. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Calcolare i coefficienti di Fourier c_i per $i = -2, -1, ..., 2$. Tracciare un grafico qualitativo di $|c_i|$, $Re(c_i)$ e $Im(c_i)$. Stabilire perché $Im(c_i) < 0$.

2-TD. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ e siano c_i i suoi coefficienti di Fourier. Trovare f sapendo che $c_0 = 1$, $c_1 = -i$, $c_2 = 1$ e $c_i = 0$ per ogni $i \geq 3$.