Analisi Matematica I - 27/09/2021 - Tempo a disposizione: 3h
COGNOME e NOME ______________________________

A1. Sia $f(x) = \begin{cases} \gamma\cos(\lambda x^{1/2}) & x > 0, \\ 3e^{-2x} & x \leq 0. \end{cases}$

Determinare i parametri $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia di classe $C^1(\mathbb{R})$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{n!}(1-\cos(2/n))$.

A3. Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 4 per la funzione $f(x) = \sin(x^2)e^{\pi x}$.

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{2}} 3x^2 \ln\left(\sqrt[3]{2}\,x^2\right) dx$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n^{\sin(1/n)}$ e della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n) + b^n\right)$ in funzione dei parametro $b \in \mathbb{R}$.

A6. Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0,2\} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{x(x-2)}$. Tracciare un grafico qualitativo di f indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre l'immagine di f.

A7. * Si considerino le funzioni $g_m(x) = mx - e^x$ per $x \in \mathbb{R}$ ed $m \in [0,+\infty)$. Calcolare il sup di g_m in funzione del parametro $m \in [0,+\infty)$. Studiare la funzione $s : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $s(m) = \sup g_m$.

B1. Sia $f(x) = (\ln 2)^x$ per $x \in \mathbb{R}$; f è

$\boxed{\text{A}}$ monotona decrescente e convessa. $\boxed{\text{B}}$ monotona crescente e concava.
$\boxed{\text{C}}$ monotona crescente e convessa. $\boxed{\text{D}}$ monotona decrescente e concava.

B2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Indicare le proprietà di F barrando le caselle corrispondenti.

☐ monotona ☐ derivabile ☐ limitata ☐ continua ☐ iniettiva ☐ suriettiva
☐ invertibile ☐ convessa.

B3. Sia a_n una successione tale che: $a_n > 0$, $a_{n+1} > a_n$, $a_n > n^{1/2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{-1/2}$ converge. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{-2}$ converge. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n^{-1}$ converge. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{3}$ converge.

B4. Fornire un esempio di successione non-negativa, limitata e non-convergente.

B5. Stabilire se le seguenti implicazioni siano vere o false, fornendo una dimostazione o un contro-esempio.
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Allora

- esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.
- $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

B6. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k e sia $x_0 \in (a, b)$. Fornire la formula per il polinomio di Taylor di ordine k con centro x_0.

B7. Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per la convergenza delle serie.

Soluzioni dello scritto del 27/09/21

Parte A

A1. $\boxed{\lambda = \pm 2 \text{ e } \gamma = 3.}$ Calcolare le derivate oppure utilizzare le espansioni note.

A2. $\boxed{2.}$ $(n+2)!/n! = (n+2)(n+1) \sim n^2$ mentre $(1 - \cos(2/n)) \sim 2/n^2$.

A3. $\boxed{x^2 + \pi x^3 + \frac{1}{2}\pi^2 x^4.}$ Utilizzare le espansioni note e sostituire.

A4. $\boxed{\ln(4) - 4/3.}$ Integrare per parti.

A5. $\boxed{\text{Diverge a } +\infty.}$ Scrivendo la successione come $e^{\sin(1/n)\ln(n)}$ sii ha $\sin(1/n)\ln(n) \to 0$. Quindi $n^{\sin(1/n)} \to 1$.

$\boxed{\text{Converge per } |b| < 1, \text{ diverge a } +\infty \text{ se } b \leq -1, \text{ oscilla se } b \geq 1.}$

La serie di $(-1)^n(\frac{\pi}{2} - \arctan(n))$ converge per il criterio di Leibniz. Resta la serie armonica di $(-b)^n$.

A6. Max loc $x_0 = 2 - \sqrt{2}$. Min loc $x_1 = 2 + \sqrt{2}$. Immagine $(-\infty, f(x_0)] \cup (0, +\infty)$.

A7. $s(m) = m(\ln(m) - 1)$ se $m > 0$ e $s(0) = 0$.

Parte B (es. 1-5)

B1. $\boxed{\text{A}}$ $0 < \ln 2 < 1$

B2. F è derivabile, limitata e continua per il Teor fondamentale del calcolo.

B3. $\boxed{\text{C}}$

B4. $b_n = (-1)^n + 1$

B5. Vero per il Teor della media integrale. Falso, contro-esempio: $f(x) = x$ su $[-1, 1]$.