Analisi Matematica I - 19/02/2021 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola ____________ **COGNOME e NOME** ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica** **Orale:** ☐ **19/02**

Note: ______________________________

A1-A4: scrivere solo la soluzione **A5-A7: scrivere la soluzione e lo svolgimento**

A1. Sia $f(x) = \frac{1}{2}e^x + \ln(3x+1)$. Calcolare $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

A2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\big(\cos(x^{3/2}) - e^{-\frac{1}{2}x^3}\big)}{\operatorname{sen}^2(x^3)}$.

A3. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3\operatorname{sen}(n) + 2\operatorname{senh}(n)}{5\cos(n) + 3\cosh(n)}$

A4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 3\,e^{-x^2+2x}(x-1)\,dx$.

A5. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{n^{-\alpha}\cos(n^{-5})}{\ln(1+n^{-3})}$ in funzione del parametro reale α.

Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=8}^{+\infty} \frac{\beta^n + 2^n}{5^n + 5^{-n}}$ in funzione del parametro reale $\beta > 0$.

A6. Sia $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \ln(e^x - \frac{2}{3}e^{2x})$. Calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali punti di massimo e minimo (specificando se locali o globali). Tracciare un grafico qualitativo di f.

A7.* Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \operatorname{senh}(\arctan(x-3))$. Studiare il segno e la monotonia di f, calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Si consideri la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ per $x \in [0, +\infty)$. Calcolare le soluzioni dell'equazione $F(x) = 0$. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

B1-B2: indicare solo la risposta scelta **B3-B7: scrivere la risposta**

B1. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Allora $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^{1/2}}$

$\boxed{A}$ $= f'(x_0)$. $\boxed{B}$ $= \frac{1}{2} f'(x_0)$. $\boxed{C}$ non esiste. $\boxed{D}$ $= 0$.

B2. Sia $\{a_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$ una successione a termini positivi. Se la $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora

$\boxed{A}$ la $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{-3}$ converge. $\boxed{B}$ la $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{3}$ diverge. $\boxed{C}$ la $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{-1}$ diverge. $\boxed{D}$ la $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{1/3}$ converge.

B3. Sia $\{a_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$ una successione. Associare le seguenti proprietà alla risposta corrispondente.

$\boxed{1}$ la successione $\{a_n\}$ è superiormente limitata;
$\boxed{2}$ la successione $\{a_n\}$ non è superiormente limitata.

$\boxed{A}$ $\forall k \; \exists \, n \in \mathbb{N} \,/\, a_n > k$. $\boxed{B}$ $\exists \, k \,/\, a_n < k \; \forall n \in \mathbb{N}$. $\boxed{C}$ $\exists \, k \,/\, a_n > k \; \forall n \in \mathbb{N}$. $\boxed{D}$ $\forall k \; \exists \, n \in \mathbb{N} \,/\, a_n < k$.

B4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Stabilire se la seguente affermazione sia vera o falsa, fornendo un contro-esempio o una dimostrazione: "se $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)$ esiste finito allora f è continua in $\bar{x}$".

B5. Fornire una dimostrazione delle seguenti implicazioni:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lipschitziana $\Rightarrow$ f limitata;
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lipschitziana $\Rightarrow$ f^2 lipschitziana;
- $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ lipschitziana $\Rightarrow$ f limitata.

B6. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Fornire una definizione di $a_n \sim b_n$ e $a_n = o(b_n)$.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema della media integrale.

Soluzioni dello scritto del 19/02/21

Parte A

A1. $\boxed{2/7}$ Si ha $f(0) = 1/2$ e quindi $(f^{-1})'(1/2) = 1/f'(0)$.

A2. $\boxed{-1/4}$ Al denominatore si ha $\operatorname{sen}^2(x^3) \sim x^6$. Al numeratore utilizzare l'espansione di e^z di ordine 2 con $z = -\frac{1}{2}x^3$ e l'espansione di $\cos(z)$ di ordine 4 con $z = x^{3/2}$ che forniscono errore $o(x^6)$ o superiore.

A3. $\boxed{2/3}$ La successione è asintotica a $2\operatorname{senh}(n)\,/\,3\cosh(n) \sim 2e^n/\,3e^n = 2/3$

A4. $\boxed{\frac{3}{2}(1-e)}$ Una primitiva è $F(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2+2x}$.

A5. $\boxed{\text{La prima serie converge per } \alpha > 4 \text{ e diverge a } +\infty \text{ per } \alpha \leq 4.}$

Successione a termini positivi asintotica a $1/n^{\alpha-3}$. Si conclude per cfr. asintotico con la serie armonica generalizzata.

$\boxed{\text{La seconda serie converge per } \beta < 5, \text{ altrimenti diverge a } +\infty.}$

Successione a termini positivi. Denominatore: asintotico a 3^n. Numeratore: asintotico a 2^n se $0 < \beta < 2$, asintotico a 2^{n+1} se $\beta = 2$, asintotico a β^n se $\beta > 2$. Si conclude per cfr. asintotico con la serie geometrica.

A6. Si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \ln(1/3)$ per continuità mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Dal segno di $f'(x) = (e^x - \frac{4}{3}e^{2x})/(e^x - \frac{2}{3}e^{2x})$ si deduce che $x = \ln(3/4)$ è un punto di massimo assoluto, mentre $x = 0$ è un punto di minimo relativo, perché f non è inferiormente limitata.

A7. Si ha $f > 0$ per $x > 3$, $f(3) = 0$ e $f < 0$ per $0 \leq x < 3$. Inolte $f(x) \to \operatorname{senh}(\pi/2)$ per $x \to +\infty$. La funzione f è monotona crescente in quanto composizione di funzioni monotone crescenti. La funzione f è inoltre "simmetrica" rispetto a $x = 3$ in quanto traslazione della funzione dispari $\operatorname{senh}(\arctan(x))$.

La funzione integrale è di classe C^1 (perché f è continua) e $F' = f$. Quindi F è strettamente decrescente in $(0, 3)$ e strettamente crescente in $(3, +\infty)$. Sappiamo che $F(0) = 0$ e per "simmetria" avremo $F(6) = 0$. Per stretta monotonia non ci sono altre soluzioni.

Per $x > 6$ si ha $F(x) = \int_6^x f(x)\,dx \geq (x-6)f(6)$ per monotonia di f. Si ha $f(6) > 0$ e quindi $F(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

Parte B (es. 1-5)

B1. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^{1/2}} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} h^{1/2} \to 0$

B2. $\boxed{\text{C}}$ $a_n \to 0^+$ quindi $a_n^{-1} \to +\infty$.

B3. $\boxed{\text{1 - B}}$ per definizione di successione superiormente limitata,
$\boxed{\text{2 - A}}$ negando la definizione precedente

B4. $\boxed{\text{falso}}$ $f(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$ non è continua in $\bar{x} = 0$

B5. Sia $|f(x_1) - f(x_0)| \leq C_L|x_1 - x_0|$,

- f è continua in $[a, b]$ e quindi limitata;

- sia $|f(x)| \leq C$ (per il punto precedente) allora

$$|f^2(x_1) - f^2(x_0)| = |f(x_1) + f(x_0)|\,|f(x_1) - f(x_0)| \leq 2CC_L|x_1 - x_0| = C_L'|x_1 - x_0|$$

- sia $x_0 \in (a, b)$ allora

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq C_L|x - x_0| + |f(x_0)| \leq C_L|b - a| + |f(x_0)| = C$$

  oppure partendo da

$$f(x_0) - C_L|x - x_0| \leq f(x) \leq f(x_0) + C_L|x - x_0|$$

  e proseguendo come sopra.