Analisi Matematica I - 01/02/2021 - Tempo a disposizione: 3h

Matricola ______________ **COGNOME e NOME** ______________________________

Laurea: ☐ **Matematica** ☐ **Fisica** **Orale:** ☐ **01/02** ☐ **19/02**

Note: ______________________________

A1-A4: scrivere solo la soluzione **A5-A7: scrivere la soluzione e lo svolgimento**

A1. Studiare il $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \mathrm{sen}(1/x)$ in funzione del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

A2. Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n^{1/2} - 3^n + 1}{4^{n/2} + 2n\ln(n+1)}$.

A3. Sia $f(x) = e^{\sqrt{3}x^2}\cos(\sqrt{2}x^{3/2})$ per $x \in \mathbb{R}$. Calcolarne il polinomio di MacLaurin di grado 4 ed indicare il resto di Peano.

A4. Calcolare $\displaystyle\int_1^{e^2} \tfrac{1}{3}\ln^2(x)\,dx$.

A5. Studiare il comportamento delle serie: $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 \arctan(1+e^{-\alpha n})}{n^{-\alpha}+5n^\alpha}$ e $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \alpha \,\mathrm{senh}\left((-1)^n \frac{\alpha}{5n+3}\right)$ in funzione del parametro reale $\alpha > 0$.

A6. Siano $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni $g(x) = \begin{cases} e^{4x} & x < 0 \\ e^{x^2-6x} & x \geq 0 \end{cases}$ e $f(x) = |g(x) - 1|$. Tracciare un grafico qualitativo di f indicando gli eventuali punti di massimo e minimo (locali e globali). Calcolare inoltre immagine, sup ed inf di f.

A7.* Si considerino le successioni $a_i > 0$ e $b_i = \ln(a_i)$ per $i \in \mathbb{N}$, $i > 0$. Verificare che $A_n = e^{B_n}$ dove

$$A_n = (\Pi_{i=1}^n a_i)^{1/n} \quad \text{e} \quad B_n = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} \qquad \text{per } n \in \mathbb{N},\ n > 0.$$

(A_n e B_n sono, rispettivamente, la media geometrica di $a_1, ..., a_n$ e la media aritmetica di $b_1, ..., b_n$).
Assumendo inoltre che $a_i = 1 + 3\,i^{-2}$, verificare che $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 1$.

B1-B2: indicare solo la risposta scelta **B3-B7: scrivere la risposta**

B1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ per ogni $x_1 < x_2$. Allora f è

$\boxed{\text{A}}$ monotona. $\boxed{\text{B}}$ continua. $\boxed{\text{C}}$ derivabile. $\boxed{\text{D}}$ convessa.

B2. Sia g una funzione continua in $[a, b]$. Se $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt = 0$ allora

$\boxed{\text{A}}$ esiste $t_0 \in [a, b]$ tale che $g(t_0) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ per ogni $t \in [a, b]$ si ha $g(t) = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ per ogni $t \in [a, b]$ si ha $g(t) \neq 0$. $\boxed{\text{D}}$ esiste $t_0 \in [a, b]$ tale che $g(t_0) \neq 0$.

B3. Sia $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$. Si considerino le funzioni $g, h : (-r, r) \to \mathbb{R}$ definite da

$$g(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad h(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Verificare che

- g è pari,
- h è dispari,
- $f = g + h$.

B4. Per ognuna delle successioni

$$a_n = n, \quad b_n = n(-1)^n - n, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

stabilire se esistono sotto-successioni convergenti e sotto-successioni divergenti; quando esistono, fornire un esempio.

B5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in [a, b]$ tale che $|f(x_\varepsilon)| < \varepsilon$. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$. Stabilire se l'affermazione precedente sia vera o falsa, fornendo una dimostrazione o un contro-esempio.

B6. Fornire una definizione di $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$.

B7. Enunciare e dimostrare il Teorema della derivata nulla.

Soluzioni dello scritto del 01/02/21

Parte A

A1. $\boxed{\text{Il limite non esiste per } \alpha \leq 0, \text{ è uguale a } 0 \text{ per } \alpha > 0.}$

A2. $\boxed{-\infty.}$ La successione è asintotica a $-(\frac{3}{2})^n$.

A3. $\boxed{T_4(x) = 1 + \sqrt{3}x^2 - x^3 + \frac{3}{2}x^4,\ f(x) = T_4(x) + o(x^4).}$ Utilizzare l'espansione di e^z di ordine 2 con $z = \sqrt{3}x^2$ e l'espansione di $\cos(z)$ di ordine 2 con $z = \sqrt{2}x^{3/2}$. Per la prima si ottine un errore $o(x^4)$, per la seconda si ottiene $\cos(\sqrt{2}x^{3/2}) = 1 - x^3 + o(x^{9/2})$. Eseguire il prodotto osservando che $o(x^{9/2}) = o(x^4)$.

A4. $\boxed{\frac{1}{3}(2e^2 - 2).}$ Integrare per parti il prodotto $\displaystyle\int \ln(x)\ln(x)\,dx$.

Oppure integrare per parti $\displaystyle\int 1 \cdot \ln^2(x)\,dx$.

Oppure integrare prima per sostituzione, con $x = e^t$, e poi (due volte) per parti.

A5. $\boxed{\text{La prima serie converge per } \alpha > 4, \text{ e diverge per } 0 < \alpha \leq 4.}$ Successione a termini positivi. $e^{-\alpha n} \to 0$ per ogni $\alpha > 0$ quindi $\arctan(1 + e^{-\alpha n}) \to \pi/4$ mentre $n^{-\alpha} \to 0$. La successione è asintotica a Cn^3/n^α. Si conclude per il criterio del cfr. asintotico con il comportamento della serie armonica generalizzata.

$\boxed{\text{La seconda serie converge per ogni } \alpha > 0.}$ La funzione senh è dispari. Quindi $\mathrm{senh}((-1)^n...) = (-1)^n\mathrm{senh}(...)$ e la serie è quindi a segni alterni. Si applica il criterio di Leibniz in quanto la funzione senh è monotona e la successione $1/(5n + 3)$ è anch'essa monotona.

A6. Minimi assoluti in $\{-6, 0\}$ e massimo locale in 3. Immagine $[0, +\infty)$. Tracciare prima il grafico di g e poi quello di f.

A7. Per proprietà dei logaritmi è facile verificare che $\ln A_n = B_n$. Verificare che $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$ da cui $A_n \to 1$: essendo $b_i > 0$ si ha

$$B_n = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} b_i}{n} \leq \frac{C}{n}$$

perché la serie converge, infatti $b_i = \ln(1 + 3/i^2) \approx 3/i^2$ e quindi la serie converge per il criterio del cfr. asintotico con la serie armonica generalizzata.

Parte B (es. 1-5)

B1. $\boxed{\text{A}}$ perché $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_2 > x_1$.

B2. $\boxed{\text{A}}$ per il teorema della media integrale

B3. Si verifica facilmente che $g(-x) = g(x)$ e $h(-x) = -h(x)$.

B4.
- $a_n \to +\infty$ quindi ogni sotto-successione diverge a $+\infty$
- $b_n = 0$ se n è pari e $b_n = -2n$ se n è dispari; quindi $b_{n_k} = b_{2k} = 0 \to 0$ mentre $b_{n_k} = b_{2k+1} = -4k - 2 \to -\infty$.
- $c_n \to 0$ quindi ogni sottosuccessione è infinitesima

B5. Sia $\epsilon = 1/k$. Allora per ogni k esiste $x_k \in [a, b]$ tale che $|f(x_k)| < 1/k$. La successione x_k è limitata, quindi ne esiste una sotto-succesione x_{k_j} convergente ad un punto $\bar{x} \in [a, b]$. Per continuità di $|f|$, ci ha $|f(\bar{x})| = \lim_{j\to+\infty} |f(x_{k_j})| \leq \lim_{j\to+\infty} 1/k_j = 0$.