Serie - Funzioni continue, minimi, massimi e zeri

1. Stabilire se le seguenti serie convergono, divergono o oscillano:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)}, \qquad \sum_{n=7}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n \ln(n)}.$$

2. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ monotona descrescente e infinitesima. Stabilire il comportamento delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n), \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin\big(f(n)\big).$$

3. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ le seguenti serie convergono:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n) + e^{1/n}}{n^a}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

---

4. Stabilire se le seguenti implicazioni sono vere o false:
   (a) se $\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ allora f è superiormente limitata
   (b) se $\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ allora f è inferiormente limitata
   (c) se $\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ allora $\max_{\mathbb{R}} f = 2$
   (d) se $\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
   (e) se $\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste x_ϵ tale che $2 - \epsilon < f(x_\epsilon)$
   (f) se $\sup_{\mathbb{R}} f = 2$ allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste x_ϵ tale che $2 + \epsilon < f(x_\epsilon)$
   (g) sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x \to a^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\pi$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tal che $f(x_0) = 0$
   (h) sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, allora esiste un punto di minimo in $[a, +\infty)$
   (i) sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, allora esiste un punto di massimo in $[a, +\infty)$.

M. Negri - November 23, 2018