Limiti di funzioni e continuità

1. Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \text{ (con } a>1 \text{ e } a<0), \quad \lim_{x\to 0^+} \log_{1/4}(2x), \quad \lim_{x\to+\infty} 2^x, \quad \lim_{x\to-\infty} \sin(x-\pi),$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \cos(x), \quad \lim_{x\to 1^-} \arctan(\pi\ln(2^x)), \quad .$$

2. Stabilire se le seguenti implicazioni sono vere o false:

   (a) se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è pari ed esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

   (b) se $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ è crescente allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   (c) se $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ allora esiste $a<3$ tale per cui $f(x)<4.3$ per $x\in(a,3)$

   (d) se esiste $\lim_{x\to x_0} \sin(f(x))$ allora esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$

   (e) se $\lim_{x\to 4} f(x) = 0^+$ allora $\lim_{x\to 4} \ln(f(x)) = -\infty$

   (f) se f è dispari allora f è continua

   (g) se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ allora $f(x)\geq 0$ definitivamente per $x\to 0^+$

   (h) se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+$ allora $f(x)\geq 0$ definitivamente per $x\to 0^+$

   (i) se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ allora $f(x)\geq 0$ definitivamente per $x\to 0^+$

3. Determinare il parametro reale a in modo tale che la seguente funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sia continua

$$f(x) = \begin{cases} \sinh(x) + \frac{1}{2} & x\geq 0 \\ \tanh(x+a) & x<0. \end{cases}$$

A. Scrivere una definizione di limite nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4^-, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 5^+, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 9.$$