Analisi Matematica I - 03/09/19 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + (x-1)$. Determinare i punti di estremo di f precisando se si tratta di estremi locali o globali.

A2. Calcolare le quattro radici dell'equazione $(z-2)^4 + 3^4 = 0$.

A3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = -14xu(x) + e^{-7x^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

A4.[⋆] Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{x+2} & \text{se } x \le 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha x) + \beta & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia di classe C^1.

A5. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_2^4 e^{2x}(x-2)^\alpha \, dx$ converge.

A6.[⋆] Determinare per quali valori dei parametri reali $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{4 + (n+6)^\beta \sin\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

A7. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2/n} - 1 - \sin\frac{2}{n}}{\ln\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}$

A8.[⋆] Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\sqrt{2}x) - 2x^2}{x^4 - 1 + \cos(x^2)}$.

A9. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x \ln \sqrt[3]{x} \, dx$.

A10.[⋆] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - 1|$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1/2, f(1/2))$.

B1.* Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_o\in(a,b)$; f è derivabile in x_o se $\boxed{\text{A}}$ esiste finito $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+2h)-f(x_o)}{2h}$. $\boxed{\text{B}}$ esiste finito $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{|h|}$. $\boxed{\text{C}}$ esiste finito $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+|h|)-f(x_o)}{|h|}$. $\boxed{\text{D}}$ esiste finito $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{x_o}$.

B2. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=0$ se $x\le 0$, $f(x)=e^{3x}$ se $x>0$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è continua. $\boxed{\text{B}}$ f è monotona. $\boxed{\text{C}}$ f è iniettiva. $\boxed{\text{D}}$ f è convessa.

B3. Sia f una funzione continua in 0. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è derivabile in 0. $\boxed{\text{B}}$ $f(0)=0$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} f(\sin x)=f(0)$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to 0} f(\cos x)=f(1)$.

B4. Sia a_n una successione con $\lim_{n\to+\infty} a_n=\ell$ per $\ell\in\mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $a_n\ge\ell$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. $\boxed{\text{B}}$ a_n è monotona. $\boxed{\text{C}}$ $a_n\le\ell$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. $\boxed{\text{D}}$ a_n è limitata.

B5. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^2$ se $x\in(0,1)$ e $f(x)=\frac{e}{x}$ se $x\in[1,+\infty)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ha massimo ma non ha minimo in $(0,+\infty)$. $\boxed{\text{B}}$ f non ha né massimo né minimo in $(0,+\infty)$. $\boxed{\text{C}}$ f non ha massimo ma ha minimo in $(0,+\infty)$. $\boxed{\text{D}}$ f ha massimo e minimo in $(0,+\infty)$.

B6.* Sia a_n una successione reale. Si consideri la successione $b_n=(a_n)^2$. $\boxed{\text{A}}$ Se a_n converge allora b_n converge. $\boxed{\text{B}}$ Se a_n converge allora b_n diverge. $\boxed{\text{C}}$ Se b_n diverge allora a_n diverge. $\boxed{\text{D}}$ Se b_n converge allora a_n converge.

B7. Si consideri $\sum_{n=0}^{\infty}\sin(a_n)$ con $a_n>0$ $\forall n$. Allora la serie converge se $\boxed{\text{A}}$ $a_n=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{C}}$ $a_n\sim\frac{1}{n}$ per $n\to\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

B8. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Allora esiste un punto di minimo x_m in $\boxed{\text{A}}$ $[a,b]$. $\boxed{\text{B}}$ $[a,b)$. $\boxed{\text{C}}$ (a,b). $\boxed{\text{D}}$ $(a,b]$.

B9.* Sia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\int_1^{x^2}\sqrt[3]{t-1}\,dt$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $F\notin C^1(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{B}}$ F' è limitata. $\boxed{\text{C}}$ $F'(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. $\boxed{\text{D}}$ F non ha punti stazionari.

B10.* Sia $f(x)=o(x)$ per $x\to 0$. Sia $g(x)=\frac{f(x)-x^2}{x}$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $g(x)=o(x)$ per $x\to 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim_{x\to 0} g(x)$ può essere infinito. $\boxed{\text{C}}$ $\lim_{x\to 0} g(x)=0$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim_{x\to 0} g(x)$ non esiste.

Soluzioni della prova del 03/09/19

Parte A

A1. Risulta $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}+1 = \dfrac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$ per $x \neq 1$. Dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $(x-1)^2-1 \geq 0$ ossia quando $x-1 \leq -1$ oppure $x-1 \geq 1$. Pertanto f è crescente negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$ e decrescente in $[0, 1)$ e $(1, 2]$. Ne risulta che $x = 0$ è punto di massimo e $x = 2$ punto di minimo. Si tratta di estremi relativi in quanto $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

A2. Osserviamo che possiamo equivalentemente riscivere

$$\begin{aligned}
(z-2)^4 &= -3^4, \\
(z-2)^4 &= 3^4(\cos\pi + i\sin\pi), \\
z-2 &= 3\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned}
z_o &= 2+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad z_1 = 2+3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
z_2 &= 2+3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad z_3 = 2+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

A3. $u(x) = (x+1)e^{-7x^2}$

A4. Le due funzioni $g(x) = 4x/(x+2)$ e $h(x) = \operatorname{sen}(\alpha x) + \beta$ sono di classe C^1 e sono definite in un intorno del punto $x_0 = 0$. Quindi è sufficiente imporre $g(0) = h(0)$ e $g'(0) = h'(0)$. Da cui $\beta = 0$ ed $\alpha = 2$.

A5. La funzione integranda $e^{2x}(x-2)^\alpha$ è continua in $(2, 4)$ ed è asintotica a $e^4(x-2)^\alpha$ per $x \to 2^+$. Quindi l'integrale converge per $\alpha > -1$.

A6. Posto

$$a_n = \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{4+(n+6)^\beta\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

otteniamo

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{n^\beta\,\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}}.$$

Perché la serie risulti convergente, deve essere $\alpha+\beta-1 > 1$, cioè $\alpha+\beta > 2$.

A7. Utilizzando gli sviluppi notevoli, abbiamo che

$$\begin{aligned}
e^{2/n} &= 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{per} \quad n\to\infty, \\
\sin\frac{2}{n} &= \frac{2}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{per} \quad n\to\infty, \\
\ln\left(1+\frac{7}{n^2}\right) &= \frac{7}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{per} \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2/n}-1-\sin\frac{2}{n}}{\ln\left(1+\frac{7}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}-1-\frac{2}{n}}{\frac{7}{n^2}} = \frac{2}{7}.$$

A8. Usando lo sviluppo di MacLaurin di $\sin t$ si ha $(\sin t)^2 = \big(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\big)^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4)$ per $t \to 0$. Sostituendo $t = \sqrt{2}x$ si trova $\sin^2(\sqrt{2}x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$. Pertanto il numeratore è asintotico a $-\frac{4}{3}x^4$ per $x \to 0$. Il denominatore è asintotico a $x^4 - 1 + 1 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{2}x^4$ per $x \to 0$. Dunque il limite richiesto è $-\frac{8}{3}$.

A9. Integrando per parti, l'integrale richiesto è pari a $\frac{1}{3}\int_0^1 x \ln x dx = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\Big]_0^1 = -\frac{1}{12}$.

A10. L'equazione della retta richiesta è $y = f(1/2) + f'(1/2)(x - 1/2)$. Si calcola $f(1/2) = 3/4$. Inoltre $f'(x) = -2x$ per ogni $x \in (-1, 1)$, da cui si calcola $f'(1/2) = -1$. Sostituendo i valori trovati nella prima espressione si ottiene $y = 3/4 - (x - 1/2)$.

Parte B

B1. $\boxed{\text{A}}$

B2. $\boxed{\text{B}}$ Si verifica che f è monotona non decrescente.

B3. $\boxed{\text{C}}$ La funzione $f(\sin x)$ è continua in $x = 0$ in quanto composizione di funzioni continue.

B4. $\boxed{\text{D}}$ Per proprietà delle successioni convergenti

B5. $\boxed{\text{A}}$

B6. $\boxed{\text{A}}$ $b_n = f(a_n)$ con $f(t) = t^2$, essendo f continua si conclude per un teorema noto. Si escludono le altre risposte con $a_n = (-1)^n$ e $a_n = (-1)^n n$, nel primo caso $b_n = 1$ converge, nel secondo $b_n = n^2$ diverge.

B7. $\boxed{\text{A}}$

B8. $\boxed{\text{A}}$ Teorema dei max e min per funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.

B9. $\boxed{\text{C}}$ Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale e dalla formula di derivazione della funzione composta si ha $F'(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}\; 2x$.

B10. $\boxed{\text{C}}$ Basta riscrivere $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x$ e usare il fatto che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ per ipotesi.