Analisi Matematica I - 09/07/19 - Tempo a disposizione: 3h
Matricola **Cognome e Nome**

A1.* Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea $y'(x) + 4y(x) = 0$.

Determinare l'integrale generale dell'equazione non omogenea $y'(x) + 4y(x) = \sin(8x)$.

A2.* Calcolare $\displaystyle\int_4^6 (x-2)\ln\left(\frac{x-2}{2}\right) dx$.

A3.* Dire per quali valori dei parametri reali α e β l'integrale $\displaystyle\int_0^5 \frac{\sin x}{x^\alpha |x^2-3|^\beta} dx$ risulta convergente.

A4. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione $(iz)^3 = +2 - 2\sqrt{3}i$, indicando le soluzioni in forma esponenziale.

A5. Sia $f(x) = \ln(2 + \tan(3x))$. Calcolare $f'(\frac{\pi}{12})$.

A6. * Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(n^{\frac{1}{3}} - 2\ln(n+1))}{n^\alpha + n\sin(1/n^3)}$ sia convergente.

A7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2} - \cos(2x)}{\sin^2(2x)}$.

A8. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x^2)$.
Determinare, se esistono, i punti di minimo assoluto per f.

Determinare, se esistono, i punti di massimo assoluto per f.

A9. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine due centrato in $x_o = 2$ della funzione $f : (0, 6) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos\left(\dfrac{x-2}{x-6}\right)$.

A10. Sia $F : [4, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_4^x \left[7 + \frac{t+2}{t^2 - 3^2}\right] dt$. Calcolare $I = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

B1.* Sia $f : [-\pi/2, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x$ se $x \in [-\pi/2, 0]$ e $f(x) = e^{2x} - 1$ se $x \in (0, 1]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f è convessa in $[-\pi/2, 1]$. $\boxed{\text{B}}$ $\nexists \lim_{x\to 0^-} f(x)$. $\boxed{\text{C}}$ $\nexists \lim_{x\to 0^+} f(x)$. $\boxed{\text{D}}$ f è derivabile in tutto $[-\pi/2, 1]$.

B2.* Siano $k, m \in \mathbb{N}$ con $0 < k < m$ tali che $f(x) \sim x^k$ e $g(x) = o(x^m)$ per $x \to 0$. Se $f(x) > 0$ allora $\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{g(x)}{f(x)} \sim x^{m-k}$. $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{g(x)}{f(x)} \sim x^m - x^k$. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{g(x)}{f(x)} = o(x^{m-k})$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{g(x)}{f(x)} = o(x^m) - o(x^k)$.

B3.* Siano a_n, b_n due successioni di numeri reali positivi tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$ e $b_n = o\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n b_n$ converge. $\boxed{\text{B}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} n^{3/2} b_n$ converge. $\boxed{\text{C}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge. $\boxed{\text{D}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n b_n$ diverge.

B4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $\boxed{\text{A}}$ $\int_a^b f(x)\, dx = (a - b) f(x_0)$. $\boxed{\text{B}}$ $\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(x_0)$. $\boxed{\text{C}}$ $\int_a^b f(x)\, dx = ab f(x_0)$. $\boxed{\text{D}}$ $\int_a^b f(x)\, dx = (b + a) f(x_0)$.

B5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{x^2} - x^2$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ha un solo punto di minimo locale. $\boxed{\text{B}}$ f non ha punti stazionari. $\boxed{\text{C}}$ f ha un solo punto di massimo locale. $\boxed{\text{D}}$ f ha almeno due punti stazionari.

B6.* Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - x \ln x$. Allora $\boxed{\text{A}}$ f ha asintoto verticale $x = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $f(x) \sim x$, per $x \to +\infty$. $\boxed{\text{C}}$ f non ha asintoti verticali. $\boxed{\text{D}}$ f ha asintoto orizzontale $y = 0$.

B7. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$. $\boxed{\text{A}}$ Se $f(a) \cdot f(b) \neq 0$, allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$. $\boxed{\text{B}}$ Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\nexists \lim_{x\to b^-} f(x)$. $\boxed{\text{D}}$ Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) \neq 0$.

B8. Sia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\boxed{\text{A}}$ il $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ esiste finito. $\boxed{\text{B}}$ il $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ esiste finito. $\boxed{\text{C}}$ il $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ non esiste. $\boxed{\text{D}}$ il $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ esiste finito.

B9. Sia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos x$ se $x \in [0, \pi/2]$ e $f(x) = -x + \pi/2$ se $x \in (\pi/2, \pi]$. Allora $\boxed{\text{A}}$ L'inversa f^{-1} è derivabile in tutto il suo insieme di definizione. $\boxed{\text{B}}$ $f^{-1}(0) = 3$. $\boxed{\text{C}}$ L'inversa f^{-1} è definita in tutto $[-\pi/2, 1]$. $\boxed{\text{D}}$ L'inversa f^{-1} è crescente nel suo insieme di definizione.

B10. Siano $z = \rho e^{i\theta}$ e $w = r e^{i\varphi}$ due numeri complessi in forma esponenziale. Allora $\boxed{\text{A}}$ $\arg(z \cdot w) = \theta + \varphi$. $\boxed{\text{B}}$ $\arg(z + w) = \theta + \varphi$. $\boxed{\text{C}}$ $|z + w| = |z| + |w|$. $\boxed{\text{D}}$ $\arg(z \cdot w) = \theta \cdot \varphi$.

Soluzioni della prova del 09/07/19

Parte A

A1. L'integrale generale dell'omogenea è $y(x) = ke^{-4x}$, $k \in \mathbb{R}$. Per l'integrale dell'equazione non omogenea, occorre calcolare l'integrale $\int \sin(8x)e^{4x}dx$ che è pari a $\frac{1}{20}e^{4x}\sin(8x) - \frac{1}{10}e^{4x}\cos(8x)$, integrando per parti due volte. Quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $y(x) = ke^{-4x} + \frac{1}{20}\sin(8x) - \frac{1}{10}\cos(8x)$, $k \in \mathbb{R}$.

A2. Integriamo per parti. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int_4^6 (x-2)\ln\left(\frac{x-2}{2}\right)dx &= \left[\frac{(x-2)^2}{2}\ln\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_4^6 - \int_4^6 \frac{(x-2)^2}{2}\frac{1}{x-2}\,dx \\ &= 8\ln 2 - \left[\frac{(x-2)^2}{4}\right]_4^6 = 8\ln 2 - 3.\end{aligned}$$

A3. Per $x \to 0$ risulta $\frac{\sin x}{x^\alpha |x^2-3|^\beta} \sim \frac{x}{x^\alpha 3^\beta} = \frac{1}{3^\beta}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ che è integrabile vicino a 0 se e solo se $\alpha - 1 < 1$ ossia $\alpha < 2$. Per $x \to \sqrt{3}$ risulta $\frac{\sin x}{x^\alpha |x^2-3|^\beta} \sim \frac{\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}^\alpha |x-\sqrt{3}|^\beta (2\sqrt{3})^\beta} = \frac{\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}^\alpha (2\sqrt{3})^\beta}\frac{1}{|x-\sqrt{3}|^\beta}$ che è integrabile vicino a $\sqrt{3}$ se e solo se $\beta < 1$.

A4. Riscriviamo il primo membro come $-iz^3$ e moltiplichiamo ambo i membri per i ottenendo $z^3 = 2\sqrt{3}+2i$. La forma esponenziale del secondo membro è $4e^{i\pi/6}$, le cui radici terze sono $z_k = \sqrt[3]{4}e^{i\theta_k}$, con $\theta_k = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

A5. Per derivazione delle funzioni composte $f'(x) = 3(1+\tan^2(3x))/(2+\tan(2x))$, quindi per $x = \pi/12$) si ha $f'(\pi/12) = 2$.

A6. Usando le espansioni di e^z, $\cos(z)$ e $\sin(z)$ per $z \to 0$ e sostituendo si ha $e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + o(x^2)$ e $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$ mentre $\sin^2(2x) \sim 4x^2$ da cui $\lim_{x\to 0} ... = 5/4$.

A7. Si ha $n\sin(1/n^3) \sim 1/n^2 \to 0$ mentre $\ln(n+1)$ è trascurabile rispetto a $n^{1/3}$. Quindi per $\alpha > 0$ la successione è asintotica a $2n^{-\alpha+1/3}$ dunque la serie converge per $\alpha > 4/3$. Se $\alpha \le 0$ la successione diverge e quindi anche la serie diverge.

A8. È immediato verificare che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pertanto, f non è superiormente limitata e il massimo assoluto non esiste. Calcolando la derivata prima, otteniamo

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{2x}, \quad \Rightarrow \quad f'(x) \ge 0 \quad \text{per } x \ge 16.$$

Pertanto, la funzione f ha il punto di minimo assoluto in $x = 16$.

A9. L'espressione del polinomio di Taylor è $P_2(x;2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2$. Dobbiamo, dunque, calcolare $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$. Abbiamo $f(2) = \cos 0 = 1$. Inoltre

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sin\left(\frac{x-2}{x-6}\right)\cdot\frac{4}{(x-6)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = \sin 0 = 0 \\ f''(x) &= -\cos\left(\frac{x-2}{x-6}\right)\cdot\frac{4^2}{(x-6)^4} \quad \Rightarrow \quad f''(2) = -\cos 0\cdot\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16.}\end{aligned}$$

Dunque, concludiamo che $P_2(x;2) = 1 - \frac{1}{32}(x-2)^2$.

A10. Osserviamo che, quando $x \to +\infty$, risulta $7 + \dfrac{t+2}{t^2 - 3^2} \approx 7$. Pertanto, concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_4^x 7\,dt = +\infty.$$

Parte B

B1. $\boxed{\text{A}}$ Tracciando il grafico di f, è immediato osservare che f è continua e, quindi, il limite in $x = 0$ esiste finito. D'altro canto, $f'(0^-) = 1$, $f'(0^+) = 2$, e, quindi, f non può essere derivabile in tutto il suo insieme di definizione, perché non lo è nell'origine.

B2. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{g(x)}{x^m}\dfrac{x^k}{f(x)} \to 0$

B3. $\boxed{\text{C}}$ in quanto $a_n b_n = o(\dfrac{1}{n^{3/2}})$.

B4. $\boxed{\text{B}}$ per il teorema della media integrale

B5. $\boxed{\text{A}}$ Basta studiare il segno della derivata prima, che si annulla solo in $x = 0$.

B6. $\boxed{\text{C}}$ in quanto $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ($f(x) \sim -x\ln x$ per $x \to +\infty$).

B7. $\boxed{\text{B}}$ Si tratta dell'enunciato del Teorema degli zeri.

B8. $\boxed{\text{B}}$ per continuità

B9. $\boxed{\text{C}}$ Tracciando il grafico di f, è immediato verificare che f è monotona decrescente e, dunque, tale risulta anche la funzione inversa f^{-1}. Poichè l'immagine di f è l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$, questo stesso intervallo sarà l'insieme di definizione dell'inversa. Questa non può essere derivabile in tutto il suo insieme di definizione, perché $f'(0) = 0$.

B10. $\boxed{\text{A}}$ dalla formula di De Moivre.